**Geometria. a.a. 2009-10. Prof. P. Piazza**
**Compito a casa del 8/10/09**

**Esercizio 0.** Esprimere nella forma $a + ib$ i seguenti numeri complessi:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad , \quad (-i)^4 \quad , \quad (3+3i)(3-3i) \ , \quad \frac{(1+2i)}{(1-2i)} \ .$$

**Esercizio 1.** Abbiamo enunciato in classe *le formule di addizione e sottrazione*

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,, \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Dedurre da queste *le formule di duplicazione*

$$\cos 2\alpha = \dots\,, \quad \sin 2\alpha = \dots$$

e poi, da queste ultime, le seguenti *formule di bisezione*:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

dove il segno è scelto a seconda del quadrante nel quale cade l'angolo $\alpha/2$.

**Esercizio 2.** Determinare le radici quadrate di $1 - i4\sqrt{3}$. (Suggerimento: utilizzare l'Es. 1.)

**Esercizio 3.** Sia $z = x + iy$. Trovare una condizione necessaria e sufficiente su $x$ ed $y$ affinché $z^3$ sia reale.

**Esercizio 4.** Dopo aver scritto in forma trigonometrica il numero $1 + i$, si calcoli $(1 + i)^{12}$.

**Esercizio 5.** Determinare le radici quarte dell'unità.

**Esercizio 6.** Studiare iniettività e suriettività delle seguenti applicazioni:

- $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow x^2 - 3x + 7$
  (Suggerimento per la suriettività: verificare, utilizzando la teoria delle disequazioni di secondo grado, che l'immagine di $f$ è contenuta in $\mathbb{R}^>$, i numeri reali positivi).
- $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
  $x \longrightarrow \sin x$
- $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longrightarrow x + 1$
- $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow 2x + 5$
- $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$
  $n \longrightarrow 1/n$
- $f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longrightarrow 2x$