Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 8/5/2016

Esercizio 1. (di ripasso)
Determinare tutti i possibili omomorfismi dal gruppo $\mathbb{Z}_6$ al gruppo S_3.

Esercizio 2. (di ripasso)
Vero o Falso:

(1) S_n ha un sottogruppo di ordine n.
(2) S_n ha un sottogruppo di ordine k per ogni $k \leq n$.
(3) S_n ha un sottogruppo di ordine $k!$ per ogni $k \leq n$.
(Suggerimento: considerare il sottoinsieme di S_n che lascia fissi $(n-k)$ elementi in $\{1, 2, \ldots, n\}$).

Esercizio 3. (di ripasso)
Sia G un gruppo ed $a \in G$. Definiamo

$$C(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}\,, \quad Z(G) = \{g \in G \mid gg' = g'g \;\; \forall g' \in G\}\,.$$

$C(a)$ è il *centralizzante* di a e $Z(G)$ è il *centro* di G.
3.1. Verificare che $C(a)$ e $Z(G)$ sono sottogruppi di G.
3.2. Verificare che $Z(G)$ è un sottogruppo normale.
3.3. Verificare che $Z(G) = \cap_{a \in G} C(a)$
3.4. Determinare tutti i centralizzanti di S_3. Determinare $Z(S_3)$.
3.5. Dato $x \in G$ possiamo definire l'applicazione

$$\gamma_x : G \to G\,, g \to x^{-1} g x\,.$$

In formule $\gamma_x(g) := x^{-1}gx$. L'insieme $\mathrm{Aut}(G)$ degli automorfismi di G, e cioè degli isomorfismi da G in G, è un gruppo rispetto alla composizione.
3.5.1. Verificare che l'applicazione $G \to \mathrm{Aut}(G)$ che associa a $x \in G$ l'automorfismo γ_x è un omomorfismo di gruppi.
L'immagine di questo omomorfismo è il gruppo degli automorfismi interni di G, denotato $\mathrm{Int}(G)$.
3.5.2. Verificare che si ha un isomorfismo di gruppi fra $\mathrm{Int}(G)$ e $G/Z(G)$.

Esercizio 4. (sugli anelli)
Consideriamo l'anello unitario $M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$. Sia T il sottoinsieme delle matrici triangolari inferiori. Verificare che T è un sottoanello, ma non un ideale. Sia U il sottoinsieme delle matrici strettamente triangolari inferiori, e cioè del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Verificare che U è un ideale in T.
A che cosa è isomorfo l'anello quoziente T/U ?

Esercizio 5. (sugli anelli) Consideriamo l'insieme delle funzioni continue reali $C^0[0,1]$ e denotiamolo R.
Introdurre in R una struttura di anello. Verificare che $I := \{f \in R \mid f(0) = 0\}$ è un ideale. Dimostrare che R/I è un campo.

Esercizio 6. Risolvere gli esercizi assegnati da Filippo Cerocchi per casa nel foglio 8.