Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 8/4/2016

Esercizio 0. Leggere p. 21 in Campanella (Esempi 4, (ii), fino a all'Osservazione 1 esclusa) e anche p. 151, fino all'Osservazione 1 (i) inclusa.

Esercizio 0.5. Sia $\phi : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi. Verificare che se G è commutativo allora anche $\mathrm{Im}\phi$ è commutativo. Verificare che se ϕ è un isomorfismo, allora $o(g) = o(\phi(g))\ \forall g \in G$.

Esercizio 1. Consideriamo il gruppo simmetrico S_3.
1.1 Scrivere tutti gli elementi di S_3.
1.2 Scrivere la tabella moltiplicativa di S_3 [1]
1.3 Quali sono i possibili ordini degli elementi di S_3 ?
1.4 Determinare l'ordine di ogni elemento di S_3.
1.5 Quali sono i possibili ordini dei sottogruppi di S_3 ?
1.6 Verificare che S_3 ha quattro sottogruppi ciclici: 3 di ordine 2 ed uno di ordine 3.
1.7 Verificare che $H = \{1, (2, 3)\}$ è uno di tali sottogruppi e che $aH \neq Ha$ per a uguale al ciclo $(1\,2\,3)$.

Esercizio 2. Sia R il rettangolo di lati $2a$ e $2b$, con $a > b$, dato da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq a, |y| \leq b\}$$

Gli elementi di $O(2)$ che trasformano R in se stesso sono 4. Descrivete questi quattro elementi e verificate che sono un sottogruppo di $O(2)$ di ordine 4, detto V_4 (gruppo di Klein). Scrivete la tabella moltiplicativa.
Vero o Falso: V_4 è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Spiegare.
Vero o Falso: V_4 è un sottogruppo di S_4. Nel caso affermativo descrivere esplicitamente tale sottogruppo di S_4. (Suggerimento: un rettangolo ha 4 vertici ....)

Esercizio 3. Consideriamo il gruppo commutativo $(\mathbb{Z}, +)$ e siano H e K due suoi sottogruppi.
Sappiamo che $H = a\mathbb{Z}$ e $K = b\mathbb{Z}$ per opportuni $a, b \in \mathbb{N}$. Caratterizzare $H \cap K$ (che è sempre un sottogruppo) e $< H \cup K >$ (l'unione insiemistica di due sottogruppi non è in generale un sottogruppo).

Esercizio 4. Sia $n \geq 2$ e consideriamo il gruppo commutativo $(\mathbb{Z}_n, +)$.
4.1. Sia d un divisore positivo di n. Determinare il sottogruppo ciclico H_d generato da $\overline{d}$ (molto facile).
4.2. Sia H un sottogruppo non banale di $(\mathbb{Z}_n, +)$. Verificare che esiste d divisore positivo di n tale che $H = H_d$.
Suggerimento: verificare che $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, \overline{x} \in H\}$ *è un sottogruppo di* $\mathbb{Z}$*.....*
4.3. Vero o Falso: se $d \neq \delta$, d e δ divisori positivi di n, allora $H_d \neq H_\delta$.

Esercizio 5. Verificare che l'intersezione arbitraria di sottogruppi di un gruppo G è un sottogruppo.

[1] lascio a voi la definizione di tabella moltiplicativa; trovate questa tabella a pagina 154 in [C] ma non sarebbe molto istruttivo leggerla prima di aver risolto l'esercizio

Esercizio 6. Sia $S \subset GL(2, \mathbb{R})$ il sottoinsieme

$$S = \{ \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} , (a, b) \neq (0, 0)\}$$

Stabilire se S è un sottogruppo.

Esercizio 7. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia $g \in G$ un elemento di ordine finito. Sia $n = o(g)$. Verificare che $g^m = 1_G$ se e solo se n divide m.
Suggerimento: in una direzione è immediato. Nell'altra usare la divisione.
Vero o Falso: se G è finito e $|G| = n$ allora $\forall g \in G$ si ha $g^n = 1_G$.

Esercizio 8. Sappiamo che $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ ha una struttura di gruppo di ordine 4 (perché $2^3 - 2^2 = 4$).
Vero o Falso: $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

Esercizio 9. Vero o Falso:
- $(\mathbb{Z}, +)$ è isomorfo a $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $(\mathbb{Q}, +)$ è isomorfo a $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- S_3 è isomorfo a $\mathbb{Z}_6$

Esercizio 10. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e ρ una relazione di equivalenza. Diremo che ρ è compatibile con $\cdot$ se

$$g \rho g', \quad \gamma \rho \gamma' \quad \Rightarrow \quad (g \cdot \gamma) \ \rho \ (g' \cdot \gamma') \,.$$

Dimostrare che se ρ è compatibile con $\cdot$ allora G/ρ ha una naturale struttura di gruppo.

Esercizi di ripasso. Svolgere gli esercizi 1.16, 1.19, 2.12 e 2.13 in Campanella.