Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 8/1/08

Esercizio 1. Svolgere l'esercizio 3 pag 179 in Sernesi 2.

Esercizio 2. Sia X una varietà differenziabile. Dimostrare che il fibrato tangente (TX, π, X) è effettivamente un fibrato vettoriale [1].
Facoltativo: determinare le funzioni di transizione del fibrato tangente.

Esercizio 3. Sia $E_{k,n}(\mathbb{R}) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_{k,n}(\mathbb{R}) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \to p$. Dimostrare che $(E_{k,n}(\mathbb{R}), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale di rango k e C^∞. È detto *fibrato universale.*

Esercizio 4. Sia M una varietà differenziabile e sia $\mathcal{A}$ un atlante numerabile localmente finito per M [2]. Utilizzando una partizione dell'unità, verificare che ogni varietà differenziabile ammette una metrica riemanniana .
Suggerimento: utilizzando le banalizzazioni locali del fibrato tangente descritte in Sernesi pag 241-242 potete definire una metrica riemanniana su $\pi^{-1}(U) \subset TM$, con $(U, \phi_U) \in \mathcal{A}$; fate questo per ogni carta e utilizzate una partizione dell'unità per ottenere un oggetto globale.....
La stessa dimostrazione stabilisce l'esistenza di una metrica in un qualsiasi fibrato vettoriale (E, π, M).

[1] In Sernesi 2, pag 241, occorre dotare l'insieme TX di una topologia: sia (U, ϕ_U) una carta di X e sia $\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ l'applicazione definita all'inizio di pag 242; prendiamo come base della topologia in TX gli insiemi $\Phi^{-1}(W)$, al variare di W negli aperti di $U \times \mathbb{R}^n$ e al variare di (U, ϕ_U) nell'atlante massimale che definisce la struttura differenziabile di X. Con questa topologia TX è Hausdorff e a base numerabile e l'argomento in Sernesi dimostra che è anche una varietà differenziabile di dimensione $2 \dim X$

[2] Il fatto che esista un tale atlante è una conseguenza (non banale) delle ipotesi fatte nella definizione di varietà differenziabile: Haudorff e a base numerabile