**Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.**
**Prof. P. Piazza**
**Compito a casa del 30/12/07**

**Esercizio 1.** Consideriamo la parametrizzazione

$$\phi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, \sin 2u)\,, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Decidere se $\phi$ è una superficie parametrizzata.
Sia $S$ il sostegno di $\phi$. Verificare che $S' := S \setminus \{x=0, y=0\}$ è una superficie regolare connessa e non-compatta (esprimere $S'$ come grafico di una funzione).

**Esercizio 2.** Sia $S$ il cilindro parametrizzato da $\phi(u,v) := (r\cos u, r\sin u, v)$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Sia $Q \subset \mathbb{R}^2$ il compatto delimitato dai grafici delle funzioni

$$v = \pm r\sin u, \quad u \in [0, 2\pi]$$

Calcolare l'area della regione $R := \phi(Q)$ e verificare che $\mathrm{Area}(R) = r\mathrm{Area}(Q)$.

**Esercizio 3.** Sia $S$ il paraboloide a sella di equazione cartesiana $z = xy$. Sia $P = (1,1,1) \in S$. Sia $f : S \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y,z) = xyz\ \forall (x,y,z) \in S$. Dopo aver spiegato perché $f$ è differenziabile si calcoli la matrice associata a $df_P$ con base di partenza uguale alla base indotta dalla parametrizzazione $(u,v) \to (u,v,uv)$ e base di arrivo la base canonica di $\mathbb{R}$.
Determinare il vettore tangente $\underline{w}_P \in T_PS$ tale che $df_P(\underline{v}_P) = < \underline{v}_P, \underline{w}_P >_P$.
Dopo aver parametrizzato i versori di $T_PS$ tramite una base ortonormale di $T_PS$, verificare che $df_P$ ristretto ai versori assume un massimo in $\underline{w}_P/||\underline{w}_P||$.

**Esercizio 5.** Sia $S$ la superficie di equazione

$$9x^2 + 6y^2 + 15z^2 - 4xy + 2x + 4y - 12\sqrt{5}z + 8 = 0$$

Calcolare $\int_S K d\nu$.

Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali $k$-dimensionali di $\mathbb{R}^n$. Dotiamo questo insieme della seguente topologia: consideriamo l'insieme $V_k(\mathbb{R}^n)$ delle $k$-ple di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$; $V_k(\mathbb{R}^n)$ è un aperto del prodotto cartesiano di $\mathbb{R}^n$ con se stesso $k$-volte ed è quindi dotato di una naturale topologia; consideriamo l'applicazione

$$q : V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$$

che associa ad un $k$-pla $(v_1, \ldots, v_k)$ di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$, il sottospazio $Span(v_1, \ldots, v_k)$. Dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente. Non è difficile dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio topologico compatto di Hausdorff: per la compattezza, si verifica che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è anche ottenuto come quoziente dello spazio $V_k^0(\mathbb{R}^n)$ delle $k$-ple ortonormali (quest'ultimo spazio è compatto);
per la proprietà di Hausdorff, si verifica che dati due sottospazi distinti $W$ e $V$ in $G_k(\mathbb{R}^n)$, ed un vettore $w \in W \setminus V$, la funzione $F(\cdot) := d(w, \cdot)$ è una funzione continua in $G_k(\mathbb{R}^n)$ che separa $W$ e $V$.

**Esercizio 6.** Seguendo il procedimento indicato dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$
(A.1). Sia $W$ un sottospazio di dimensione $n-k$ di $\mathbb{R}^n$ e sia

$$O_W = \{V \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid V \cap W = \underline{0}\}$$

Sia $V_0$ un elemento di $O_W$. Costruire delle applicazioni biettive

$$O_W \leftrightarrow \mathrm{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$$

con $\mathrm{Hom}(V_0, W)$ lo spazio vettoriale di tutte le applicazione lineari da $V_0$ a $W$. [1]
(A.2) Sia $\phi : O_W \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ l'applicazione biettiva appena costruita: verificare che gli $O_W$ sono aperti e le $\phi$ omeomorfismi.
(A.3) Dimostrare che $\{(O_W, \phi)\}$ sono una collezione di carte locali $C^\infty$-compatibili per $G_k(\mathbb{R}^n)$.

**Esercizio 7.** Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali $k$-dimensionali di $\mathbb{R}^n$. Sappiamo che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è una varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$ Consideriamo l'applicazione $\psi : G_k(\mathbb{R}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ che manda un sottospazio $k$-dimensionale $W$ in $W^\perp$. Dimostrare che $\psi$ è un diffeomorfismo.

---

[1] *Ulteriori suggerimenti per questo primo punto:*
(i) Dato $A \in \mathrm{Hom}(V_0, W)$ sia $V_A = \{\underline{v} + A\underline{v},\ \underline{v} \in V_0\}$, $V_A \subset \mathbb{R}^n$. Verificare che $V_A$ ha dimensione $k$ e che $V_A \cap W = \underline{0}$.
(ii) Verificare che $\mathbb{R}^n = V_0 \oplus W$. Siano $\pi : \mathbb{R}^n \to V_0$ e $\rho : \mathbb{R}^n \to W$ le rusultanti proiezioni. Verificare che se $V \in O_W$ allora $\pi|_V \in \mathrm{Iso}(V, V_0)$. Poniamo

$$A_V = \rho \circ (\pi|_V)^{-1}.$$

(iii) Utilizzare (i) e (ii) per determinare le due mappe

$$O_W \to \mathrm{Hom}(V_0, W)\ , \quad O_W \leftarrow \mathrm{Hom}(V_0, W)$$

una inversa dell'altra.
(iv) Fissando una base in $V_0$ ed una base in $W$ costruire il secondo isomorfismo $\mathrm{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$.