Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 7/12/07

Esercizio 1. Consideriamo le superfici regolari S e S' parametrizzate sull'aperto $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+$ rispettivamente da

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u) \quad \text{e} \quad \psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \log v)$$

Si consideri l'applicazione $f := \psi \circ \phi^{-1} : S \to S'$.
Verificare che f è un diffeomorfismo (scrivere l'epressione di f verificando che è C^∞, osservare che è biettiva e calcolare il differenziale nelle basi indotte dalle parametrizzazioni). Verificare che non è un'isometria. Verificare che $K(P) = K(f(P))$ per ogni $P \in S$. Dedurne che il Teorema Egregium non si inverte.

Esercizio 2. Consideriamo il paraboloide ellittico in forma canonica, $z = x^2 + y^2$, e sia $\phi(r, \theta) := (r \cos\theta, r \sin\theta, r^2)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ una sua parametrizzazione locale. Sia σ la curva ottenuta restringendo ϕ alla curva di equazione $r = r_0$. Dare una formula per la curvatura geodetica di σ. Verificare che le curve α ottenute restringendo ϕ alle curve di equazione $\theta = \theta_0$ (eventualmente riparametrizzate) sono geodetiche.

Esercizio 3. Svolgere gli esercizi 3.14, 3.15, 4.5, 4.19 del libro di testo.

Esercizio 4. Svolgere i Problemi 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 del libro di testo.

Esercizio 5. Sia S la superficie data dalla parametrizzazione locale $\phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^3)$. Studiare la natura dei punti di S (ellittici, iperbolici etc...). Decidere se in un intorno del punto parabolico $O := (0, 0, 0)$, S giace o meno in uno dei due semispazi definiti dal piano tangente $T_O S$.