Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 3/12/07

Esercizio 1. . Sia S una superficie orientabile, con versore normale N. Sia $\sigma : I \to S$ una curva regolare contenuta in S con curvatura κ_σ. Sia $\alpha := N \circ \sigma : I \to S^2$.
1.1 Verificare che se il supporto di σ non contiene punti planari o parabolici, allora α è una curva regolare.
1.2 Supponiamo inoltre che σ sia una linea di curvatura; denotiamo con κ_n la curvatura normale di σ. Dimostrare che

$$\kappa_\sigma(t) = |\kappa_n(t)|\kappa_\alpha(t)\,.$$

Suggerimento: cercate di calcolare $\kappa_\alpha(t)$.

Esercizio 2. Sia S la superficie parametrizzata data da $\phi(u,v) = (u, v, u^2v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Determinare la prima e la seconda forma fondamentale di S. Studiare la natura dei punti di S, determinando in particolare il luogo dei punti parabolici. Si dica inoltre in quali punti di S le direzioni coordinate sono principali ed in tali punti si calcolino le curvature principali.

Esercizio 3. Sia $S = \{(x,y,z) \,|\, z = xy\}$ parametrizzata da $\phi(u,v) = (u,v,uv)$ e sia $P = (1,1,1) \in S$.

- Verificare che $\underline{v}_p := (1,1,2)$ è un elemento di T_PS, determinandone le coordinate rispetto alla base indotta da ϕ.
- Determinare il versore normale N definito da ϕ.
- Calcolare la curvatura normale di S in P lungo la direzione associata a $\underline{v}_p$.
- Determinare la matrice associata a dN_P nella base indotta da ϕ.
- Determinare le curvature principali, le direzioni principali e la curvatura Gaussiana di S in P.

Esercizio 4. Sia $\sigma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare **parametrizzata secondo la lunghezza d'arco** e sia $\phi : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione $\phi(t,v) = \sigma(t) + v\sigma'(t)$.
4.1. Verificare che dato $(t,v) \in (a,b) \times \mathbb{R}$ con $v \neq 0$ esiste un intorno aperto U di (t,v) tale che $\phi\big|_U : U \to \phi(U)$ è una parametrizzazione di una superficie *regolare.* (Questa prima parte dell'esrcizio è stata già assegnata il 9/11.)
4.2. Fissiamo un tale U e sia $S := \phi(U)$; determinare prima e seconda forma fondamentale di S, verificando in particolare che tutti i punti di S sono parabolici.

Esercizio 5. Decidere se la semisfera *chiusa* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$ è una superficie regolare.