Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 26/11/07

Esercizio 1. Consideriamo l'elicoide S parametrizzato da

$$\phi(t,s) = (s\cos t, s\sin t, t)\,, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Sia $R \subset S$ l'immagine tramite ϕ di $Q = [-1,1] \times [-1,1]$. Dopo aver spiegato perché R è una regione regolare di S, calcolare Area(R). Calcolare la lunghezza della curva in S ottenuta prendendo la frontiera di R.

Esercizio 2. Sia S il cono ad una falda privato del suo punto singolare:

$$S = \{(x,y,z), x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

Dare una parametrizzazione di S.
Descrivere l'immagine di S in S^2 tramite l'applicazione di Gauss. Sia $p = (1/2, \sqrt{3}/2, 1) \in S$. Determinare, direttamente, la matrice associata a $dN(p)$ nella base associata alla vostra parametrizzazione. Determinare nuovamente tale matrice facendo uso della prima e seconda forma fondamentale e della formula pag. 196.

Esercizio 3. Sia S l'elicoide dell'Esecizio 1. Calcolare la base indotta da ϕ in T_pS, con $p = (0, 1, \pi/2)$. Calcolare l' espressione in coordinate di $I_p(\underline{v})$. Calcolare la matrice associata a $dN(p)$ in tale base. Calcolare poi l'espressione in coordinate di $Q_p(\underline{v})$.

Esercizio 4. Sia S la superficie di equazione $xyz = 1$. Sia $p = (1,1,1) \in S$. Determinaare una parametrizzazione locale intorno a p. Determinare I_p e la matrice associata a $dN(p)$ nella base di T_pS indotta dalla parametrizzazione scelta. Determinare le curvature principali in p; determinare direzioni principali.

Esercizio 5. Sia T il toro ottenuto ruotando intorno all'asse y la circonferenza C del piano $z = 0$ di raggio 1 e centro $(2, 0, 0)$. Fate una figura.

- Determinare i punti ellittici, iperbolici e parabolici di T.
- Sia $D = T \cap \{y = 0\}$. Calcolare le direzioni asintotiche nei punti iperbolici di D (vedi pag 205) .