Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 25/10/07

Esercizio 1. Sia S_1 il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e sia S_2 l'ipeboloide iperbolico $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Sia $F : S_1 \to S_2$ l'applicazione definita come segue: per ogni $P = (x, y, z) \in S_1$ sia $H = (0, 0, z)$ e sia r la semiretta di origine H e passante per P; poniamo $F(P) = r \cap S_2$.

- determinare l'espressione di F (risulta che $F = \tilde{F}|_{S_1}$, con $\tilde{F}$ definita su tutto $\mathbb{R}^3$).
- sia $P = (1, 0, 1) \in S_1$. Introdurre parametrizzazioni locali intorno a P ed $F(P)$ e calcolare le basi indotte da tali parametrizzazioni in $T_P(S_1)$ e $T_{F(P)}(S_2)$
- calcolare la matrice associata al differenziale $dF(P) : T_P(S_1) \to T_{F(P)}(S_2)$ con scelta di basi sui piani tangenti data dalle parametrizzazioni introdotte nel punto precedente.

Esercizio 2. Sia S il semicono definito da $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, parametrizzato da $\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, e sia S' la superficie di equazione $x = zy^2$ parametrizzata da $\psi(\lambda, \mu) = (\lambda^2\mu, \lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Sia $f : S \to S'$ l'applicazione $f(x, y, z) = (zy^2, y, z)$, $(x, y, z) \in S$. Dopo aver spiegato perché S e S' sono regolari e perché f è un'applicazione differenziabile, calcolare $\forall P \in S$ la matrice associata a df_P rispetto alle basi di T_PS e $T_{f(P)}S'$ indotte da ϕ e ψ rispettivamente.

Esercizio 3. Sia S il semicono di equazione $x^2 + y^2 = 2z^2, z > 0$. Sia S' il paraboloide iperbolico di equazione $z = xy$. Si consideri l'applicazione $f : S \to S'$ definita da

$$S \ni (x, y, z) \longrightarrow (x, yz, xyz) \in S'.$$

Spiegare perché f è differenziabile.
Sia $P = (1, 1, 1) \in S$; determinare una parametrizzazione locale $\phi : U \to S$ di S intorno a P della forma $\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), v)$; considerare la parametrizzazione naturale di S', che è un grafico; denotiamo tale parametrizzazione con ψ.

- determinare le basi indotte da queste parametrizzazioni in T_PS e $T_{f(P)}S'$ rispettivamente;
- determinare la matrice associata a $df_P; T_PS \to T_{f(P)}S'$ rispetto alle basi appena trovate;
- verificare che $\underline{v} := (0, 2, 1) \in T_PS$; calcolare $df_P(\underline{v})$.