

Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.

Prof. P. Piazza

Compito a casa del 19/10/07

Esercizio 1. Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione differenziabile

$$f(x, y) = x \log y - 1.$$

- Verificare che il luogo degli zeri di f è unione di due 1-sottovarietà¹;
- determinare una parametrizzazione regolare di ognuna di esse e disegnarle.

Esercizio 2. Sia $F(x, y, z) := (\log xy, \log xz)$.

- determinare il più grande aperto $U \subset \mathbb{R}^3$ sul quale F è differenziabile;
- verificare che $f^{-1}(0)$ è unione di due 1-sottovarietà; determinare parametrizzazioni di queste 1-sottovarietà e verificare che sono piane.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) := xyz$.

- Determinare i punti critici di f .
- Verificare che $f^{-1}(1)$ ha quattro componenti connesse, ognuna delle quali è una superficie regolare. Di ciascuna componente connessa scrivere una parametrizzazione e indicare le linee coordinate.

Esercizio 4. Sia $\phi(t, s) := (ts^2, t^2s, ts)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Consideriamo $\text{Im } \phi \subset \mathbb{R}^3$, l'immagine di ϕ in \mathbb{R}^3 .

- Verificare che $S := \text{Im } \phi \setminus \underline{0}$ è una superficie regolare (suggerimento: esprimere S come grafico di una funzione $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ per un opportuno aperto $U \subset \mathbb{R}^2$).
- Sia $\Sigma := f^{-1}(0) \setminus \underline{0}$, con $f(x, y, z) := xy - z^3$; verificare che Σ è una superficie regolare e che S è un sottoinsieme proprio di Σ .

Esercizio 5. Sia S la sfera unitaria in \mathbb{R}^3 e sia $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Calcolare il piano tangente a S in P utilizzando:

- la proiezione stereografica dal polo nord
- la parametrizzazione dell'esempio 3.1.15 del libro
- la parametrizzazione dell'esempio 3.1.16 del libro
- l'equazione cartesiana implicita di S

Nei primi tre casi, determinare in particolare la base $\{\partial_1|_P, \partial_2|_P\}$ del piano tangente indotta dalla parametrizzazione considerata.

¹Vi ricordo che per definizione le 1-sottovarietà sono connesse.