

Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 10/10/07

Esercizio 1. Dimostrare che la curvatura di una curva regolare è un invariante per isometrie¹. Dimostrare che la torsione di una curva biregolare è un invariante per movimenti rigidi².

Esercizio 2. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'elica circolare

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t).$$

- determinare il piano osculatore in $\sigma(0)$, π_0 .
- sia $\tilde{\sigma}$ la curva piana ottenuta proiettando σ ortogonalmente su π_0 . Verificare che le curvature di σ e $\tilde{\sigma}$ coincidono in $\sigma(0)$.
- verificare in generale che se σ è una curva parametrizzata, $\sigma(t_0) = P_0$, e $k(t_0) \neq 0$, allora la curva $\tilde{\sigma}$ uguale alla proiezione ortogonale di σ sul piano osculatore π_0 in P_0 ha in P_0 curvatura \tilde{k} uguale a $k(t_0)$ (suggerimento: si scelga un riferimento opportuno, utilizzando quindi l'esercizio 1).

Esercizio 3. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata $\mathbb{R} \ni t \rightarrow (t, \cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^3$.

- Calcolare κ , τ ed i tre versori di Frenet; determinare i punti di curvatura massima;
- calcolare il piano osculatore in ogni punto e verificare che forma un angolo costante con l'asse z ;
- parametrizzare σ secondo la lunghezza d'arco; determinare gli estremi dei due archi di σ aventi lunghezza 2 e punto iniziale $(0, 1, 0)$.

Esercizio 4. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata data da

$$\sigma(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Riparametrizzare σ secondo la lunghezza d'arco.

¹ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'isometria se $T\underline{x} = A\underline{x} + \underline{c}$, $A \in O(3)$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$

²un'isometria è un movimento rigido se $A \in SO(3)$