Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.
Prof. P. Piazza
Esercizi per il periodo 27/12/06 - 8/1/07. Seconda parte.

Esercizio . Svolgere i Problemi 4.14, 5.6.

Esercizio . Verificare che $\sigma : I \to S$ è una linea asintotica di S orientabile se e solo se $\sigma''(t) \in T_{\sigma(t)}S$. Dedurne che se r è una retta contenuta in una superficie regolare, allora r è una linea asintotica.

Esercizio . È data la superficie S di parametrizzazione $\phi(u,v) = (u, v, (u+v^2)^2)$ $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Sia σ la curva in S ottenuta restringendo ϕ alla retta $v = 0$. Verificare che σ è una linea di curvatura di S . Stabilire quando la curvatura normale di σ è massima o minima.

Esercizio . Sia S la superficie $z = x^3 - 3xy^2$. Sia σ la curva di equazione $x - y = z + 2x^3 = 0$. Dopo aver verificato che l'immagine di σ è contenuta in S (passare ad equazioni parametriche sia per S che per σ), decidere se σ è una linea di curvatura. (Potete procedere direttamente oppure utilizzare il Problema 4.6 del libro di testo).

Esercizio . Sia S la superficie $z = x^3 - 3xy^2$ parametrizzata da $\phi(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$. Verificare che S è costituita da punti iperbolici, tranne l'origine che è planare. Verificare se esistono linee v che siano linee asintotiche.

Esercizio . Sia S la superficie parametrizzata da $\phi(u,v) = (u, v, u^2 \log v)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2, v > 0$. Classificare i punti di S. Verificare che S non è una rigata. Verificare che S contiene due curve costituite interamente da punti parabolici.

Esercizio . Sia S l'elicoide parametrizzato da $\phi(u,v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Si consideri la curva σ ottenuta restringendo ϕ al grafico della funzione seno iperbolico nel piano (u,v). Verificare che σ è una linea di curvatura (potete far uso del Problema 4.6, ad esempio). Stabilire se σ è a curvatura normale massima o minima.

Esercizio . Consideriamo le superfici regolari S e S' parametrizzate sull'aperto $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+$ rispettivamente da

$$\phi(u,v) = (v \cos u, v \sin u, u) \quad \text{e} \quad \psi(u,v) = (v \cos u, v \sin u, \log v)$$

Si consideri l'applicazione $f := \psi \circ \phi^{-1} : S \to S'$.
Verificare che f è un diffeomorfismo (scrivere l'epressione di f verificando che è C^∞, osservare che è biettiva e calcolare il differenziale nelle basi indotte dalle parametrizzazioni). Verificare che non è un'isometria. Verificare che $K(P) = K(f(P))$ per ogni $P \in S$. Dedurne che il Teorema Egregium non si inverte.

Esercizio . Consideriamo il paraboloide ellittico in forma canonica, $z = x^2 + y^2$, e sia $\phi(r,\theta) := (r \cos\theta, r \sin\theta, r^2)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ una sua parametrizzazione locale. Sia σ la curva ottenuta restringendo ϕ alla curva di equazione $r = r_0$. Dare una formula per la curvatura geodetica di σ. Verificare che le curve α ottenute restringendo ϕ alle curve di equazione $\theta = \theta_0$ sono geodetiche.

Esercizio . Sia S la superficie di equazione

$$9x^2 + 6y^2 + 15z^2 - 4xy + 2x + 4y - 12\sqrt{5}z + 8 = 0$$

Calcolare $\int_S K d\nu$.