Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.
Prof. P. Piazza
Esercizi per il periodo 27/12/06 - 8/1/07. Seconda parte.
Soluzione ultimi 3 esercizi

Esercizio . *Consideriamo le superfici regolari S e S' parametrizzate sull'aperto $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+$ rispettivamente da*

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u) \quad e \quad \psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \log v)$$

Si consideri l'applicazione $f := \psi \circ \phi^{-1} : S \to S'$.
Verificare che f è un diffeomorfismo (scrivere l'epressione di f verificando che è C^∞, osservare che è biettiva e calcolare il differenziale nelle basi indotte dalle parametrizzazioni). Verificare che non è un'isometria. Verificare che $K(P) = K(f(P))$ per ogni $P \in S$. Dedurne che il Teorema Egregium non si inverte.

Soluzione. Abbiamo osservato in classe che f è biettiva e che è tautologicamente C^∞; la sua inversa è anche tautologicamente C^∞; ne segue che f è un diffeomorfismo. Osserviamo poi che la matrice asssociata a df_P nelle basi indotte da ϕ e ψ è l'identità (anche questo è immediato, si veda il discorso fatto a pp 146/147): in formule $df_P(\partial_j\big|_P) = \partial'_j\big|_{f(P)}$. (Ovviamente questo non vuol dire che df_P sia l'identità; di fatto lo spazio tangente a S in P non è neanche uguale allo spazio tangente a S' in $f(P)$.) In particolare

$$< df_P(\partial_1\big|_P), df_P(\partial_1\big|_P) >_{f(P)} = < \partial'_1\big|_{f(P)}, \partial'_1\big|_{f(P)} >_{f(P)}$$

Ci domandiamo se df_P è un'isometria lineare: se $P = \phi(u, v)$ allora $< \partial_1\big|_P, \partial_1\big|_P >_P = u^2 + 1$. D'altra parte $f(P) = \psi(u, v)$ e $< \partial'_1\big|_{f(P)}, \partial'_1\big|_{f(P)} >_{f(P)} = u^2$ e concludiamo immediatamente che f non è un'isometria.
Facendo i soliti calcoli si verifica che se $P = \phi(u, v)$ allora

$$K(P) = -\frac{1}{(u^2 + 1)^2} = K(f(P)).$$

Esercizio . *Consideriamo il paraboloide ellittico in forma canonica, $z = x^2 + y^2$, e sia $\phi(r, \theta) := (r \cos\theta, r \sin\theta, r^2)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ una sua parametrizzazione locale. Sia σ la curva ottenuta restringendo ϕ alla curva di equazione $r = r_0$. Dare una formula per la curvatura geodetica di σ. Verificare che le curve α ottenute restringendo ϕ alle curve di equazione $\theta = \theta_0$ sono geodetiche.*

Soluzione. Semplici calcoli dimostrano che $E(r, \theta) = 1 + 4r^2$, $F \equiv 0$, $G(r, \theta) = r^2$, quindi la nostra parametrizzazione è ortogonale.
Si ha poi $N = (1 + 4r^2)^{-1/2}(-2r(\cos\theta), -2r(\sin\theta), 1)$. Un semplice ragionamento intorno alla Definizione 5.1.19 mostra che, in generale,

$$\kappa_g = < \frac{\sigma''}{||\sigma'||^2}, N \wedge \frac{\sigma'}{||\sigma'||} >$$

dove abbiamo utilizzato le formule pp 17/18 ed il fatto che $\sigma' \perp N \wedge \frac{\sigma'}{||\sigma'||}$.
Nel nostro caso particolare, lungo $r = r_0$, otteniamo:

$$\sigma'(\theta) = (-r_0 \sin\theta, r_0 \cos\theta, 0)\,, \quad \frac{\sigma'}{||\sigma'||} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$N \wedge \frac{\sigma'}{||\sigma'||} = (1 + 4r_0^2)^{-1/2}(-\cos\theta, -\sin\theta, -2r_0)\,, \quad \frac{\sigma''}{||\sigma'||^2} = (-\frac{\cos\theta}{r_0}, -\frac{\sin\theta}{r_0}, 0)$$

da cui
$$\kappa_g = \frac{1}{r_0(1+4r_0^2)^{1/2}}$$
lungo le curve $r = r_0$.
Un calcolo analogo mostra invece che le curve $\theta = \theta_0$ hanno curvatura geodetica identicamente uguale a zero. Ne segue che sono geodetiche.

Esercizio . *Sia S la superficie di equazione*
$$9x^2 + 6y^2 + 15z^2 - 4xy + 2x + 4y - 12\sqrt{5}z + 8 = 0$$
Calcolare $\int_S K d\nu$.

Soluzione. È subito visto che trattasi di un ellissoide reale. Per il teorema di Gauss- Bonnet
$$\int_S K d\nu = 2$$