Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.
Prof. P. Piazza
Esercizi per il periodo 27/12/06 - 8/1/07. Prima parte.

Esercizio . Decidere se la semisfera *chiusa* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ è una superficie regolare.

Esercizio . Verificare che l'applicazione $\phi(u, v) = (u^2, uv, v^2)$ definita sull'aperto $U = \{(u, v), u > 0, v > 0\}$ è una parametrizzazione locale.

Esercizio . Consideriamo la parametrizzazione

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \sin 2u)\,, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Decidere se ϕ è una superficie parametrizzata.
Sia S il sostegno di ϕ. Verificare che $S' := S \setminus \{x = 0, y = 0\}$ è una superficie regolare connessa e non-compatta (esprimere S' come grafico di una funzione).

Esercizio . Svolgere gli esercizi 3.14, 3.15, 4.5, 4.19 del libro di testo.

Esercizio . Svolgere i Problemi 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 del libro di testo.

Esercizio . Sia S il cilindro parametrizzato da $\phi(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v)$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sia $Q \subset \mathbb{R}^2$ il compatto delimitato dai grafici delle funzioni

$$v = \pm r \sin u, \quad u \in [0, 2\pi]$$

Calcolare l'area della regione $R := \phi(Q)$ e verificare che $\mathrm{Area}(R) = r\mathrm{Area}(Q)$.

Esercizio . Sia S il paraboloide a sella di equazione cartesiana $z = xy$. Sia $P = (1, 1, 1) \in S$. Sia $f : S \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = xyz$ $\forall (x, y, z) \in S$. Dopo aver spiegato perché f è differenziabile si calcoli la matrice associata a df_P con base di partenza uguale alla base indotta dalla parametrizzazione $(u, v) \to (u, v, uv)$ e base di arrivo la base canonica di $\mathbb{R}$.
Determinare il vettore tangente $\underline{w}_P \in T_P S$ tale che $df_P(\underline{v}_P) = < \underline{v}_P, \underline{w}_P >_P$.
Dopo aver parametrizzato i versori di $T_P S$ tramite una base ortonormale di $T_P S$, verificare che df_P ristretto ai versori assume un massimo in $\underline{w}_P / ||\underline{w}_P||$.

Esercizio . Sia S la superficie data dalla parametrizzazione locale $\phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^3)$. Studiare la natura dei punti di S (ellittici, iperbolici etc...). Decidere se in un intorno del punto parabolico $O := (0, 0, 0)$, S giace o meno in uno dei due semispazi definiti dal piano tangente $T_O S$.