Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza

Esame scritto del 15/12/06

ATTENZIONE: i compiti disordinati e/o poco leggibili non saranno neanche corretti.

Esercizio 1.

- Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $a + ib$:

$$\frac{1}{1-2i}\,, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i(\frac{1}{\sqrt{2}})\right)^{12}$$

- Determinare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^4 = -1$$

Esercizio 2.
Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ ed una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con coordinate associate (x, y, z). Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Sia $T : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ l'applicazione definita da

$$T(\underline{v}) = \underline{v} - < \underline{v}, \underline{u} > \underline{u}\,.$$

(1) Spiegare perché T è *lineare.*
(2) Determinare la matrice associata a T nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.

Esercizio 3.
Stabilire quali delle seguenti affermazioni è vera, giustificando le risposte:

(1) Sia $m \geq 2$. Il sottoinsieme V di $M_{m,m}(\mathbb{R})$ definito da

$$V = \{A \in M_{m,m}(\mathbb{R}) |\ \det A = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale.

(2) Il sottoinsieme W di $\mathbb{R}^n$ definito da

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) |\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$$

è un sottospazio vettoriale.

(3) Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathcal{V}_O$. Il sottoinsieme U di $\mathcal{V}_O$ definito da

$$U = \{\underline{v} \in \mathcal{V}_O \mid\ \langle \underline{v}, \underline{w}_1 \rangle = 0 = \langle \underline{v}, \underline{w}_2 \rangle\}$$

è un sottospazio vettoriale.

(4) $\det(-A) = -\det(A)$, $\forall A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

(5) l'applicazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$(x_1, x_2) \to (x_1 + x_2, \cos(x_1 - x_2))$$

è un'applicazione lineare

(6) se $A \in SO(n)$ allora $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è suriettiva.

Esercizio 4. Sia $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

e sia $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A. Determinare una base di $\mathrm{Im}(F_A)$ e una base di $\mathrm{Ker}(F_A)$. Studiare iniettività e suriettività dell'applicazione F_A.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica fissata e coordinate associate (x_1, x_2, x_3, x_4). Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dal vettore $(1, -1, 1, -1)$. Determinare equazioni cartesiane per W.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathcal{A}^3$ fissiamo un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ con coordinate associate (x, y, z). Sia $r \subset \mathcal{A}^3$ la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = 2t - 1. \end{cases}$$

Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per r e parallelo alla retta r' di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 2 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 7. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Sia $r \subset \mathcal{E}^3$ la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

e $P \in \mathcal{E}^3$ il punto di coordinate $(0, 1, 0)$. Determinare le coordinate dei punti $Q \in r$ la cui distanza da P sia uguale a $\sqrt{5}$.