Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Esonero del 1/12/06 con soluzione

Esercizio. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica fissata e coordinate associate (x_1, x_2). Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l' applicazione lineare

$$F \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix}$$

- Determinare la matrice C associata a F rispetto alla base canonica (equivalentemente, determinare C tale che $F = L_C$).
- Si consideri la base
$$\mathcal{B} = \{ \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \}$$
e siano $\underline{y}$ le coordinaate associate.
Determinare la matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica.
- Determinare le coordinate nella base $\mathcal{B}$ del vettore generatore della retta di equazioni cartesiane $x_1 + 8x_2 = 0$.
- Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}$ (quindi: base partenza = base arrivo = $\mathcal{B}$)

Soluzione. La matrice C associata a F nella base canonica è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F(\underline{e}_j)$ nella base canonica. Questa matrice è $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.
La matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica, è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{e}_j$ nella base $\mathcal{B}$; equivalentemente, la matrice cercata è *l'inversa* della matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$.
Per trovare esplicitamente la matrice procediamo come segue:
nel primo caso occorre scrivere

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \delta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

risolvere questi due sistemini in α, β e γ, δ e ottenere la matrice cercata come

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} .$$

Nel secondo caso si scrive la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$, che è praticamente data dal testo, e la si inverte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice cercata è quella che compare a destra dell'ultima equazione.
Passiamo al terzo punto. Diamo un nome ai vettori di $\mathcal{B}$: poniamo $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Il vettore direttore della retta è il vettore di coordinate $(8, -1)$ e cioè il vettore $8\underline{e}_1 - \underline{e}_2$. Dato che dal punto precedente sappiamo che

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{2}\underline{v}_1 - \frac{1}{2}\underline{v}_2 , \quad \underline{e}_2 = \underline{v}_2$$

otteniamo che il vettore direttore è anche uguale a

$$8(\frac{1}{2}\underline{v}_1 - \frac{1}{2}\underline{v}_2) - \underline{v}_2 \equiv 4\underline{v}_1 - 5\underline{v}_2$$

e quindi ha coordinate $(4, -5)$ nella base $\mathcal{B}$. Equivalentemente, sappiamo che le formule di cambiamento di coordinate sono

$$\underline{y} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} \underline{x}$$

e basta inserire a destra le coordinate $(8, -1)$ per ottenere le coordinate cercate. Passiamo all'ultimo punto; conosciamo la matrice D associata a F nella base canonica e vogliamo invece la matrice A associata a F nella base $\mathcal{B}$. Basta utilizzare la ormai ben nota formula. Lo schemino è quindi

$$D \text{ associata alla scelta } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$$

$$\mathbf{A} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\} \quad \{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\}$$

$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v_1}} & \underline{\mathbf{v_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{vmatrix} B\,, \quad \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v_1}} & \underline{\mathbf{v_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{vmatrix} B$$

$$\mathbf{A} = B^{-1}DB$$

con $B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Dato che B^{-1} la conosciamo, $B^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix}$, e dato che D la conosciamo, otteniamo

$$A = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{vmatrix}$$

Avremmo anche potuto procedere direttamente; calcolare $F(\underline{v}_1) \equiv F(2, 1)$, che è uguale a $\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$, poi impostare il sistema

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

risolverlo e trovare $\alpha = 3/2$, $\beta = 3/2$; questa era la prima colonna. Analogamente avremmo proceduto per la seconda colonna, ritrovando la matrice $\begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{vmatrix}$.

Esercizio. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per $(4, 1, 0)$ e complanare alle rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: la retta r cercata è intersezione di due piani. Una volta capito di quali piani r è intersezione, può essere utile il metodo del fascio.....

Soluzione. Un semplicemente ragionamento mostra che la retta cercata si ottiene come intersezione di due piani σ e σ', dove σ è il piano per s e $(4, 1, 0)$ e σ' è il piano per t e per $(4, 1, 0)$. Le equazioni cartesiane di questi due piani si ottengono con il metodo del fascio; mettendo a sistema le due equazioni ottenute si ottengono le equazioni cartesiane della retta cercata. Esplicitamente, il fascio di piani per s è

$$\lambda(x + 2z - 1) + \mu(y - z - 3) = 0$$

Imponendo il passaggio per $(4, 1, 0)$ troviamo $3\lambda - 2\mu = 0$ e possiamo prendere $(\lambda, \mu) = (2, 3)$. Otteniamo così

$$\sigma : 2x + 3y + z - 11 = 0$$

Il facio di piani per t è

$$\lambda(x - z - 2) + \mu(y + z) = 0$$

Imponendo il passaggio per $(4, 1, 0)$ troviamo $2\lambda + \mu = 0$ e possiamo prendere $(\lambda, \mu) = (1, -2)$. Otteniamo così

$$\sigma : x - 2y - 3z - 2 = 0$$

La retta cercata ha dunque equazione

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 11 = 0 \\ x - 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\mathcal{B} := \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ che hanno lunghezza uguale a 2 [1] e sono ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$.

Soluzione. Un vettore ortogonale a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ e a $\underline{g} = (0, 1, -1)$ è il vettore

$$\underline{f} \wedge \underline{g} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & 1 & 0 \\ \underline{j} & -1 & 1 \\ \underline{k} & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\underline{i} + \underline{j} + \underline{k} \equiv (-1, 1, 1)$$

I vettori di $\mathcal{V}_O$ ortogonali a due vettori linearmente indipendenti formano un sottospazio vettoriale di dimensione 1; dunque i vettori di $\mathcal{V}_O$ ortogonali sia a $\underline{f}$ che a $\underline{g}$ sono tutti e soli i vettori $\lambda \underline{f} \wedge \underline{g}$ che hanno quindi coordinate $(-\lambda, \lambda, \lambda)$. Tra questi, quelli di lunghezza 2 sono quelli per cui $3\lambda^2 = 4$, ovvero quelli per cui $\lambda = \pm 2/\sqrt{3}$. Esplicitamente, si tratta dei due vettori di coordinate $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}})$ e $(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$.

Esercizio. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\mathcal{B} := \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}' := \{\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}'\}$ di $\mathcal{V}_O$ tale che

- $\underline{i}', \underline{j}' \in \mathrm{Span}((0, 0, 1), (0, 1, 1))$
- $\mathcal{B}'$ è equiorientata alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione.
È chiaro che $\mathrm{Span}((0, 0, 1), (0, 1, 1)) = \mathrm{Span}((0, 0, 1), (0, 1, 0)) \equiv \mathrm{Span}(\underline{k}, \underline{j})$. Possiamo quindi scegliere $\underline{i}' = \underline{k}$, $\underline{j}' = \underline{j}$ con il che è chiaro che il terzo vettore $\underline{k}'$ sarà uguale o a $\underline{i}$ oppure a $-\underline{i}$. Si tratta solo di capire quale segno scegliere per avere $\{\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}'\}$ equiorientata alla base standard. Possiamo scegliere a questo punto due strade: facciamo una scelta, ad esempio $\underline{k}' := \underline{i}$ e poi calcoliamo la matrice B del cambiamento di base e vediamo che segno ha il suo determinante (dato che $B \in O(3)$, sarà necessariamente $\det B = \pm 1$); se il segno è positivo abbiamo fatto la scelta giusta, se il determinante è negativo dovevamo fare l'altra scelta. Lascio a voi i dettagli di questo precedimento.
La seconda strada è quella di utilizzare il prodotto vettoriale:

[1](I vettori di lunghezza 2 sono anche i vettori il cui quadrato della lunghezza è 4

sappiamo che $\{\underline{k}, \underline{j}, \underline{k} \wedge \underline{j}\}$ è una base equiorientata alla base standard. Basta allora porre $\underline{k}' := \underline{k} \wedge \underline{j}$ e calcolare $\underline{k} \wedge \underline{j}$ tramite la ben nota formula. Si ottiene $-\underline{i}$. Conclusione: *una* base che soddisfi entrambe le condizioni nel testo dell'esercizio è la base $\{\underline{k}, \underline{j}, -\underline{i}\}$.

Esercizio. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z). Siano A, B, C, D i punti di coordinate

$$A = (1, 2, 2), \quad B = (2, 1, 2), \quad C = (2, 2, 1), \quad D = (1, 1, 1).$$

(1) Si verifichi che A, B, C, D non sono complanari.
(2) Scrivere un'equazione cartesiana del piano α contenente A, B, C.
(3) calcolare la distanza tra α e D.

Soluzione.
Per risolvere il primo punto possiamo determinare l'equazione del piano che passa per A, B, C, equazione che dobbiamo comunque trovare nel punto (2), e verificare che D non soddisfa tale equazione. L'equazione del piano per tre punti è ben nota, è il piano per il punto A e di giacitura generata dai due vettori

$$\underline{v}_1 := \overline{OB} - \overline{OA}\,, \quad \underline{v}_2 := \overline{OC} - \overline{OA}\,.$$

Fate una figura. Si ha $\overline{OB} - \overline{OA} = (1, -1, 0)$, $\overline{OC} - \overline{OA} = (1, 0, -1)$ e quindi il piano α ha equazione

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

e cioè $x + y + z - 5 = 0$. È charo che D non appartiene al piano, dato che le sue coordinate non soddisfano l'equazione.
L'altra strada per dimostrare che A, B, C, D non sono complanari è di dimostrare che

$$\overline{OB} - \overline{OA}\,, \quad \overline{OC} - \overline{OA}, \quad \overline{OD} - \overline{OA}$$

non sono vettori complanari. Fate una figura. Basta dimostrare che non sono linearmente dipendenti; per fare questo mettiamo le loro coordinate nelle colonne di una matrice 3×3 e, ad esempio, calcoliamo il determinante. Tale determinante è diverso da zero; $\overline{OB} - \overline{OA}\,, \quad \overline{OC} - \overline{OA} \quad \overline{OD} - \overline{OA}$ sono quindi indipendenti, cioè non-complanari.
Per risolvere l'ultimo punto possiamo utilizzare la formula vista a lezione, oppure calcolare la distanza fra D e la sua proiezione ortogonale sul piano α per A, B, C. Per trovare la proiezione ortogonale basta trovare la retta per D ortogonale al piano α, e poi trovare l'intersezione di tale retta con il piano α.
Ecco i dettagli: un vettore ortogonale al piano è il vettore $(1, 1, 1)$; la retta per D ortogonale al piano ha quindi equazioni parametriche

$$(1, 1, 1) + t(1, 1, 1)$$

I punti della retta sono quindi dati da $(1 + t, 1 + t, 1 + t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. L'intersezione della retta col piano si ottiene determinando $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(1 + t) + (1 + t) + (1 + t) - 5 = 0\,.$$

Otteniamo $t = 2/3$ e quindi la proiezione ortogonale di D sul piano è il punto $D_\alpha = (5/3, 5/3, 5/3)$. Conclusione

$$d(D, \alpha) = d(D, D_\alpha) = \sqrt{(\frac{5}{3} - 1)^2 + (\frac{5}{3} - 1)^2 + (\frac{5}{3} - 1)^2} = 2/\sqrt{3}.$$