Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 1/12/06

Esercizio 1. Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$. Sappiamo che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è una varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$ Consideriamo l'applicazione $\psi : G_k(\mathbb{R}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ che manda un sottospazio k-dimensionale W in $W^\perp$. Dimostrare che ψ è un diffeomorfismo.

Gli esercizi che seguono presuppongono la lettura degli appunti *Fibrati vettoriali: definizioni e prime proprietà.*

Esercizio 2. (Facoltativo.) Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X). Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1} .$$

Verificare che (E, π_E, X) è isomorfo a (F, π_F, X) se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.

Esercizio 3. (Facoltativo.) Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:
1) $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia $\widehat{E}$ l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e) \mathcal{R} (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x) e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$.
Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale topologico di rango k.

Esercizio 4. Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale di rango k. Verificare che è ben definito il duale di E, E^*. Determinare le funzioni di transizione di E^* a partire da quelle di E.

Esercizio 5. (Facoltativo) Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali topologici. Sia $\phi : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un omeomorfismo).

Esercizio 6. Sia $E_{k,n}(\mathbb{R}) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_{k,n}(\mathbb{R}) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \to p$. Dimostrare che $(E_{k,n}(\mathbb{R}), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale di rango k e C^∞.

Esercizio 7. Dimostrare che il fibrato tangente TM è effettivamente un fibrato vettoriale ; determinare le funzioni di transizione del fibrato tangente.
Dimostrare che una n-sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$ è orientabile se e solo se il fibrato normale è banale.