Geometria 1. a.a. 2006-07. Gruppo B. Prof. P. Piazza

Soluzione compito a casa del 28/11/06

Soluzione esercizio 1. Le due rette sono complanari ed incidenti. Per vederlo basta applicare il criterio enunciato e dimostrato in *Appunti di geometria affine.* Si ha infatti

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

in quanto le ultime due colonne sono linearmente dipendenti. Questo ci dice che le due rette sono complanari. Adesso possiamo stabilire se sono parellele, incidenti o coincidenti semplicemente calcolando il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa. Si ha

$$rg\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} rg\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

La matrice dei coefficienti ha rango 3; di conseguenza anche la matrice completa ha rango 3 e le due rette sono incidenti in un punto (da Rouché-Capelli segue che l'intersezione delle due rette è non vuota e ha dimensione zero). Un piano che le contiene entrambe si ottiene fissando un punto Q su una retta, ad esempio la seconda, e facendo passare per questo punto il generico piano per la prima retta. In formule: il generico piano per le prima retta è $\lambda(x+1)+\mu(z-2)=0$. Un punto sulla seconda è : $(-5/2, 1, 1)$; quindi $\lambda = 2$ $\mu = -3$ (a meno di un fattore scalare) e si ha l'equazione $2x - 3z + 8 = 0$.

Soluzione esercizio 2. Un vettore non nullo della retta W è il vettore $\underline{v} = (1, -1, 1)$. Dunque i versori di W sono $\underline{v}_1 = \underline{v}/\|\underline{v}\| = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\underline{v}_2 = -\underline{v}/\|\underline{v}\| = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ Per determinare quale tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ formi un angolo acuto con il versore $\underline{j}$, basta ricordarsi che due vettori formano un anglo acuto se e solo se il coseno dell'angolo che formano è positivo, ovvero se e solo se il loro prodotto scalare è positivo. Si calcola immediatamente $\langle \underline{v}_1, \underline{j}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\langle \underline{v}_2, \underline{j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dunque il versore richiesto è $\underline{v}_2$.

Soluzione esercizio 3. Una base di W è data dal vettore $(1, 1, 0)$. Ne segue che i vettori di W sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ della forma $(\lambda, \lambda, 0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quelli di lunghezza 2 sono quelli per cui $\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = 2$, ovvero quelli con $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Esplicitamente, si tratta dei due vettori $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

Soluzione esercizio 4. Si ha $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2\rangle = \frac{2}{\sqrt{150}} - \frac{2}{\sqrt{150}} = 0$ e quindi i due vettori sono ortogonali. Inoltre,

$$||\underline{f}_1|| = 1\,, \quad ||\underline{f}_2|| = 1$$

e quindi i due vettori sono ortonormali. Dato che le coordinate di $\underline{f}_1$ e quelle di $\underline{f}_2$ soddisfano l'equazione del piano, concludiamo che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ costituiscono una base ortonormale del piano σ.

Per (ii): il suggerimento ci dice che

$$\underline{u}_1 = \langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle \underline{f}_1 , \quad \underline{u}_2 = \langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle \underline{f}_2$$

e si tratta solo di fare i due prodotti scalari. Facendo i conti otteniamo $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = -1/\sqrt{5}$ e $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = 12/\sqrt{30}$; quindi $\underline{u}_1 = (-2, 1, 0)$, $\underline{u}_2 = (2/5, 4/5, 2)$.
Per giustificare il ragionamento del suggerimento basta ragionare come segue: sappiamo che $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 = \alpha \underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta \underline{f}_2$. Dato che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ si ha:

$$\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \langle \alpha \underline{f}_1 + \beta \underline{f}_2, \underline{f}_1 \rangle = \alpha \langle \underline{f}_1, \underline{f}_1 \rangle + \beta \langle \underline{f}_2, \underline{f}_1 \rangle \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha.$$

Quindi $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \alpha$; analogamente $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = \beta$, come volevasi.

Soluzione esercizio 5. Esecizio già svolto in classe ma con dati diversi.
Basta scrivere l'equazione cartesiana $ax + by + cz = 0$ del piano $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ e prendere la retta generata dal vettore che ha coordinate (a, b, c). L'equazione cartesiana del piano è data da

$$\det \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

e cioè $x - y - z = 0$. La retta è data quindi da $\mathrm{Span}(1, -1, -1)$. Le equazioni parametriche sono immediate e quelle cartesiane si ottengono come al solito (Gauss + compatibilità) oppure tramite il teorema degli orlati imponendo che

$$\mathrm{rg} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \,.$$

Notiamo che se fossimo interessati esclusivamente alle equazioni cartesiane della retta ortogonale al piano $W := \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ allora potremmo anche ragionare come segue:

$$(x, y, z) \perp W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp \underline{v},\ \forall \underline{v} \in W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp (1, 1, 0) \textbf{ e } (x, y, z) \perp (0, 1, 1)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la bilinearità del prodotto scalare per dimostrare l'implicazione $\Leftarrow$.
Ma

$$(x, y, z) \perp (1, 1, 0) \textbf{ e } (x, y, z) \perp (0, 1, 1) \Leftrightarrow$$
$$< (x, y, z), (1, 1, 0) >= 0 \textbf{ e } < (x, y, z), (0, 1, -1) >= 0$$

e svolgendo i due prodotti scalari otteniamo finalmente le due equazioni cartesiane per la retta ortogonale:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$