Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 29/11/06

Soluzione esercizio 1. La matrice cercata ha come prima colonna le coordinate di $F_A(0,2)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$ e come seconda colonna le coordinate di $F_A(1,1)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$. Si ha

$$F_A(0,2) = A\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}, \quad F_A(1,1) = A\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

D'altra parte

$$(0,4) = 4(0,1) + 0(1,2), \quad (2,1) = -3(0,1) + 2(1,2)$$

da cui la matrice cercata

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soluzione alternativa. La matrice A è la matrice associata ad F_A nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ (come base di arrivo e come base di partenza). Se B è la matrice cercata abbiamo schematicamante

$$A \text{ associata a } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$$

$$B \text{ associata a } \{(0,2),(1,1)\}, \quad \{(0,1),(1,2)\}.$$

Sappiamo che

$$B = D^{-1}AC$$

con

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calcolando l'inversa di D e svolgendo il prodotto righe per colonne ritroviamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soluzione esercizio 2. Sia $\mathcal{C} := \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ la nuova base. Scegliamo questi vettori in modo tale che $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ siano una base del piano assegnato W e $\underline{w}_3 \notin W$. È ovvio che i vettori $\underline{w}_1$, $\underline{w}_2$ e $\underline{w}_3$ hanno coordinate $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ nel sistema di riferimento da loro stessi definito. Se $\underline{v}$ è un vettore del piano W allora W è combinazione lineare di $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ e quindi ha coordinate $\underline{y}$ del tipo $(\alpha, \beta, 0)$. Viceversa se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{y}$ del tipo $(\alpha, \beta, 0)$ allora $\underline{v} \in W$ dato che $\underline{v} = \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2$. Ciò dimostra che W ha equazione $y_3 = 0$ nelle coordinate associate a $\mathcal{C}$. Per determinare espicitamente i tre vettori basterà scegliere due vettori non-proporzionali in W, ad esempio $\underline{w}_1 = (1,-1,0)$ e $\underline{w}_2 = (0,1,-1)$ ed un terzo vettore non in W, ad esempio $\underline{w}_3 = (1,1,1)$.

Soluzione esercizio 3. Per verificare che i tre punti non sono allineati basta scrivere equazioni per la retta P_1P_2 e poi verificare che P_3 non soddisfa queste equazioni. Alternativamente, basta verificare che

$$\underline{OP_2} - \underline{OP_1} \notin \mathrm{Span}(\underline{OP_3} - \underline{OP_1}).$$

Entrambe le verifiche sono immediate. L'equazione del piano per 3 punti è ben nota e si ottiene
$$4x + 2y - z - 5 = 0\,.$$

Soluzione esercizio 4. I vettori direttori delle 2 rette sono 2 vettori di giacitura per il piano; abbiamo quindi un punto e due vettori di giacitura. A questo punto si procede come al solito: le equazioni cartesiane del piano sono
$$(x, y, z) = Q_0 + t\underline{v} + s\underline{w}$$
con $\underline{v}$ e $\underline{w}$ vettori direttori delle due rette date, ovvero $\underline{v} = (-3, 4, 1)$ e $\underline{w} = (1, 1, 4)$. Un'equazione cartesiana del piano cercato è dunque
$$\det \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ y-2 & 4 & 1 \\ z+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$
ovvero
$$15x + 13y - 7z - 48 = 0.$$

Soluzione esercizio 5. Un semplicemente ragionamento mostra che la retta cercata è l'intersezione del piano π e del piano per Q e s. Quest'ultimo piano si ottiene con il metodo del fascio; mettendo poi a sistema con l'equazione cartesiana di π si ottengono le equazioni della retta cercata. Esplicitamente, il facio di piani contenenti la retta s è
$$\lambda(x - 2z + 4) + \mu(2y - z) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$
Imponendo il passaggio per Q otteniamo l'equazione
$$5\lambda - \mu = 0$$
e possimao prendere $(\lambda, \mu) = (1, 5)$. Ogni altra soluzione differisce da questa solo per un fattore scalare, dunque tutte le soluzioni corrispondono allo stesso piano in $\mathbb{R}^3$. L'equazione che otteniamo con la scelta $(\lambda, \mu) = (1, 5)$ è
$$x + 10y - 7z + 4 = 0$$
La retta cercata ha dunque equazioni
$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x + 10y - 7z + 4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 6. I parametri direttori della retta si ottengono risolvendo il sistema omogeneo
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$
Otteniamo, ad esempio, il vettore direttore $(1, 1, -1)$. Il fascio improprio di piani ortogonali alla direzione $(1, 1, -1)$ è dato quindi da $1 \cdot x + 1 \cdot y + (-1) \cdot z = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$; e cioè da
$$x + y - z = k\,, \quad k \in \mathbb{R}.$$
Il piano cercato si ottiene imponendo il passaggio per il punto $(-1, 0, 1)$; si trova $k = -2$.
Conclusione: il piano cercato è il piano $x + y - z = 2$.

Soluzione esercizio 7. Basta applicare meccanicamente il procedimento: prima troviamo una base ortogonale, poi la normalizziamo moltiplicando ogni vettore per l'inverso della sua lunghezza.
Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\underline{u}_1 = \underline{w}_1 = (1,1,0)$$
$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{\langle \underline{w}_2, \underline{u}_1 \rangle}{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle}\underline{u}_1 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Infine $\underline{u}_3 = \underline{w}_3$ dato che $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_1 \rangle = 0$ e $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_2 \rangle = 0$. La base cercata è quindi:

$$\left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), \quad (0,0,1) \right\}$$