Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza

Soluzioni compito a casa del 24/11/06

Esercizi sui determinanti.

Soluzione esercizio 1. Sviluppando mediante la formula di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo adesso rispetto alla terza riga:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\det \begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(k-1) - (-1-k) = 3k - 1.$$

Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero, pertanto la matrice data è invertibile se e solo se $k \neq 1/3$.

Soluzione esercizio 2.

Sviluppiamo il determinante di A rispetto alla prima riga mediante la formula di Laplace:

$$\det A = \det \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = a\det \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ f & g & h \\ y & z & w \end{vmatrix} - b\det \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & g & h \\ x & z & w \end{vmatrix}$$

Sviluppando ancora mediante la regola di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det A = ad\det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} - bc\det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

$$= (ad - bc)\det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Il determinante di B si calcola in modo perfettamente analogo, sviluppando rispetto alla prima colonna. Possiamo anche "fare i matematici", osservando che $\det B = \det B^T$ (ciò vale in generale) e ricondurci al caso precedente.

Soluzione esercizio 3. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è uguale a 30, pertanto si tratta di una matrice non singolare. Ne segue che il sistema ammette un' unica soluzione (x_1, x_2, x_3) data da

$$x_1 = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5};$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{30} = -\frac{1}{5};$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5};$$

Esercizi di geometria affine. Sketch delle soluzioni

Soluzione esercizio 1. I parametri direttori di r sono le coordinate di un suo vettore direttore e cioè di un vettore generatore del sottospazio r_0 associato al sottospazio affine r. r_0 è ottenuto considerando le soluzioni del sistema *omogeneo* associato al sistema che definisce r; in questo caso si ha quindi che r_0 è il sottospazio di equazione cartesiana $2x - y = 0$. Quindi $l = 1, m = 2$.
Per determinare l'equazione parametrica di r osserviamo che $P_0 = (-1, 0)$ è una soluzione dell'equazione di r; quindi $P_0 = (-1, 0) \in r$; ma allora abbiamo un punto di r ed i parametri direttori di r, ne segue che le eq. par. sono $x = -1 + t, y = 2t$. Altrimenti, risolviamo l'equazione. [1] In questo caso è tutto piuttosto banale: ponendo $y = t$ (variabile libera) e quindi $x = t/2 - 1$ da cui $x = t/2 - 1, y = t$ come prima.

Soluzione esercizio 2. Diamo una soluzione diretta: dire che le 3 rette sono incidenti in un punto vuol dire che l'intersezione delle 3 rette è non vuota e costituita da un punto. Basta allora verificare che il sistema 3×2 dato dalle 3 equazioni delle 3 rette ammette un'unica soluzione. Il rango della matrice dei coefficienti è chiaramente 2 (notare che questa è una matrice 3×2). Basta allora controllare(teorema di Rouché-Capelli) che il rango della matrice completa è anche 2, cioè, ad esempio, che

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Calcolando il determinante scopriamo che è diverso da zero; ne segue che le 3 rette non sono incidenti.

[1] questo è il metodo generale che abbiamo visto per passare da equazioni cartesiane di una sottovarietà affine ad equazioni parametriche.

Soluzione esercizio 3. Le due rette non sono parallele, avendo vettori direttori non-proporzionali. Ne segue che sono incidenti in un punto. Possiamo determinare l'intersezione P e poi scrivere la retta per 2 punti.
Oppure possiamo ispirarci al ragionamento fatto in dimensione tre e considerare il fascio di rette determinato dalle due rette date:

$$\lambda(2x - y + 3) + \mu(x + y + 1) = 0\,, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$$

Fra tutte queste rette (sono ∞^1) ne esiste una sola che passa per P_0. Per determinare quali λ e μ occorre scegliere, basterà imporre il passaggio per P_0: otteniamo l'equazione omogenea $\lambda(2) + \mu(2) = 0$, che ha soluzione $t(1, -1)$. Possiamo quindi scegliere $\lambda = 1$, $\mu = -1$ e risostituendo otteniamo $(2x - y + 3) - (x + y + 1) = 0$, cioè $x - 2y + 2 = 0$.

Soluzione esercizio 4.
(4.1)+ (4.2) Applicare meccanicamente le formule viste a lezione tenendo conto che una base per il sottospazio giacitura di π è dato da $\underline{v} = P_2 - P_1 = (-1, 1, 0)$, $\underline{v}' = P_3 - P_1 = (-1, 0, 1)$.
4.3 Prendere il fascio improprio definito dall'equazione di cui in 4.1 e imporre il passaggio per P. Il fascio improprio definito da un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è, per definizione, la famiglia dei piani paralleli a tale piano e cioè, per quanto visto a lezione, la famiglia $\{ax + by + cz + k = 0, k \in \mathbb{R}\}$.

Soluzione esercizio 5. Il piano coordinato yz ha equazioni $x = 0$. Il fascio di piani paralleli al piano coordinato yz ha equazione $x = d$, al variare di $d \in \mathbb{R}$. L'equazione cercata è allora $x = 2$.

Soluzione esercizio 7. Parametri direttori $l = 2, m = -1, n = 1$. Eq. cart.: possiamo ad esempio ricavare t dalla seconda equazione, $t = -y - 2$, e sostituirlo nella prima e terza equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} x - 2(-y - 2) - 1 = 0 \\ z - (-y - 2) - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni non sono univocamente determinate (una retta è l'intersezione di infinite coppie distinte di piani, pensate allo spigolo di un libro). Ovviamente, possiamo anche sfruttare il fatto che deve essere

$$\text{rg}\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{1}$$

Ciò è equivalente a

$$\begin{cases} \det\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \det\begin{vmatrix} x - 1 & z - 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

e queste *sono* equazioni cartesiane (sviluppando il determinante). Possiamo anche considerare

$$\left|\begin{array}{c|c} 2 & x - 1 \\ -1 & y + 2 \\ 1 & z - 3 \end{array}\right|$$

ridurre con Gauss e imporre la compatibilità.

Soluzione esercizio 8. Basta risolvere esplicitamente il sistema omogeneo associato. Le equazioni parametriche di s le scriviamo immediatamente e da quelle le equazioni cartesiane.

Soluzione esercizio 9. Basta considerare il fascio di piani per la retta data ed imporre il passaggio per il punto $(0, 2, 0)$. Il fascio di piani ha equazioni

$$\lambda(x - z - 3) + \mu(y + 2z - 1) = 0$$

al variare di (λ, μ) in $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Imponendo il passaggio per $(0, 2, 0)$ si ottiene $-3\lambda + \mu = 0$ che ha soluzione $\lambda = 1$, $\mu = 3$ (a meno di un comune fattore di proporzionalità $t \in \mathbb{R} \setminus 0$). Risostituendo questi valori nell'equazione qui sopra, scopriamo che il piano cercato ha quindi equazione $x + 3y + 5z - 6 = 0$.

Soluzione esercizio 10. Dalle equazioni cartesiane di r possiamo scrivere il fascio di piani per r; imponendo il parallelismo con $(11, 0, -1)$ otteniamo un'equazione lineare omogenea in λ e μ e poi procediamo come nell'esercizio 9.

Soluzione esercizio 11. Notiamo che il punto non appartiene alla retta; il problema è quindi ben posto. Si può procedere in (almeno) due modi: si determinano 2 punti distinti sulla retta e si utilizza l'equazione del piano per 3 punti non allineati. Si può altrimenti scrivere l'equazione cartesiana della retta e procedere come nell'Es. 9.