Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 24/11/06

Esercizio A. Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo dotato $G_k(\mathbb{R}^n)$ di una topologia. Seguendo il procedimento indicato dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$
(A.1). Sia W un sottospazio di dimensione $n-k$ di $\mathbb{R}^n$ e sia

$$O_W = \{V \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid V \cap W = \underline{0}\}$$

Sia V_0 un elemento di O_W. Costruire delle applicazioni biettive

$$O_W \leftrightarrow \mathrm{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}.$$

[1]

(A.2) Sia $\phi : O_W \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ l'applicazione biettiva appena costruita: verificare che gli O_W sono aperti e le ϕ omeomorfismi.
(A.3) Dimostrare che $\{(O_W, \phi)\}$ sono una collezione di carte locali per $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio B. Svolgere gli esercizi 1, 2, 6 pag 189; gli esercizi 1, 2 pag 201-202 e gli esercizi 5, 6 , 7 pag 212 in *Geometria 2* di Sernesi.

[1] *Ulteriori suggerimenti per questo primo punto:*
(i) Dato $A \in \mathrm{Hom}(V_0, W)$ sia $V_A = \{\underline{v} + A\underline{v},\ \underline{v} \in V_0\}$, $V_A \subset \mathbb{R}^n$. Verificare che V_A ha dimensione k e che $V_A \cap W = \underline{0}$.
(ii) Verificare che $\mathbb{R}^n = V_0 \oplus W$. Siano $\pi : \mathbb{R}^n \to V_0$ e $\rho : \mathbb{R}^n \to W$ le rusultanti proiezioni. Verificare che se $V \in O_W$ allora $\pi|_V \in \mathrm{Iso}(V, V_0)$. Poniamo

$$A_V = \rho \circ (\pi|_V)^{-1}.$$

(iii) Utilizzare (i) e (ii) per determinare le due mappe

$$O_W \to \mathrm{Hom}(V_0, W)\ , \quad O_W \leftarrow \mathrm{Hom}(V_0, W)$$

una inversa dell'altra.
(iv) Fissando una base in V_0 ed una base in W costruire il secondo isomorfismo $\mathrm{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$.