

Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.

Gruppo B. Prof. P. Piazza

Compito a casa del 24/11/06

Esercizi sui determinanti.

Esercizio 1. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.

Esercizio 2. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Dimostrare che

$$\det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Cosa possiamo dire circa $\det A$? ¹

Esercizio 3. Studiare il Teorema di Cramer, pag 160. (Corollario 9.11)

Verificare che la matrice dei coefficienti del seguente sistema è non singolare. Applicare il teorema di Cramer per determinare l'unica soluzione del sistema.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Esercizi di geometria affine.

Esercizi sul piano affine. Consideriamo il piano affine \mathcal{A}^2 e sia $RA(O, \underline{i}, \underline{j})$ un riferimento affine. Denotiamo con (x, y) le coordinate associate. Disegnate sul vostro foglio un riferimento affine.

Esercizio 1. Sia r la retta di equazione cartesiana $2x - y + 2 = 0$. Determinare i parametri direttori di r . Determinare un'equazione parametrica per r . Disegnare r nel riferimento assegnato.

Disegnare le seguenti rette:

r_2 di equazione cartesiana $x = 3$.

r_3 di equazione cartesiana $y = -1$.

r_4 di equazioni parametriche $x = 1 + 2t, y = -1 - 2t$.

¹Vale in generale la Proposizione : sia $N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che

$$N = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

con $A \in M_{k,k}(\mathbb{R}), C \in M_{(n-k),(n-k)}(\mathbb{R}), B \in M_{k,(n-k)}(\mathbb{R}),$ con $k < n$. Allora

$$\det N = \det A \cdot \det C.$$

La dimostrazione non è difficile; utilizza l'induzione su k ed è alla vostra portata.

Esercizio 2. Dire se le 3 rette di equazione cartesiana

$$3x + 3y - 1 = 0 \quad 2x + y + 2 = 0 \quad x - y + 2 = 0$$

sono incidenti in un punto.

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana della retta r passante per l'intersezione delle due rette $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$ e per il punto P_0 di coordinate $(0, 1)$.

Esercizi sullo spazio affine. Passiamo allo spazio affine \mathcal{A}^3 con riferimento $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ e coordinate associate (x, y, z) .

Esercizio 4.

4.1 Determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π per i punti $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ e $P_3 = (0, 0, 1)$.

4.2 Determinare due vettori di giacitura \underline{v} , \underline{v}' per π (e cioè una base per il sottospazio π_0 di \mathbb{R}^3 associato al sottospazio affine π).

4.3 Determinare l'equazione cartesiana del piano σ parallelo al piano π e passante per il punto $P = (16, 1, 0)$.

Esercizio 5. Determinare l'equazione cartesiana del piano parallelo al piano coordinato yz e passante per $P = (2, 3, 1)$. (Il piano coordinato yz è il piano per l'origine individuato dall'asse y e dall'asse z e cioè dalla giacitura $W = \text{Span}(\underline{j}, \underline{k})$.)

Esercizio 6. Disegnare

- il piano di equazione cartesiana $x + y - 1 = 0$.
- il piano di equazione cartesiana $z = 3$
- la retta di equazione cartesiana $x = 1$ $y = 2$
- la retta di equazioni parametriche $x = t$, $y = t$, $z = 1$.

Esercizio 7. È data la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Determinare i parametri direttori di r . Scrivere equazioni cartesiane per r . Dire se queste equazioni sono univocamente determinate.

Esercizio 8. Determinare i parametri direttori della retta r

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Scrivere le equazioni cartesiane della retta s parallela a r e passante per $P = (0, 1, 1)$.

Esercizio 9. Scrivere l'equazione cartesiana del piano per il punto $(0, 2, 0)$ e per la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 10. Scrivere l'equazione del piano per la retta di cui nell'esercizio 8 e parallelo alla retta di direzione $(11, 0, -1)$.

Esercizio 11 Determinare l'equazione cartesiana per il piano π che contiene il punto $(3, 2, 1)$ e la retta di equazioni parametriche $x = 2 + 3t$, $y = 4 + t$, $z = 1 + 5t$.