Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Soluzioni compito a casa del 17/11/06

Soluzione esercizio 1.
Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e sia $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. La matrice B del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è *la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate del j-mo vettore della base $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$*. Nel nostro caso

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \, , \quad \underline{v}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

e quindi

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue, per quanto visto a lezione (Abate, Sezione 8.1), che

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

da cui segue anche

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa dell matrice $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\Bigg| \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\Bigg| \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{matrix}\Bigg| \to$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{matrix}\Bigg|$$

Abbiamo cioè

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 2. Usiamo la linearità di F. Vogliamo calcolare le coordinate di $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$ nella base canonica; queste saranno le colonne della matrice cercata. Esprimiamo allora $\underline{e}_1$ come combinazione lineare degli elementi della nuova base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\} \equiv \{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,1)\}$, perché è su questi vettori che sappiamo calcolare F, ed applichiamo la linearità di F. In questo caso l'espressione di $(1,0,0)$ in funzione di $\{\underline{e}'_j\}$ è molto facile a stabilirsi:

$$(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)$$

Quindi
$F(1,0,0) = F((1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)) = F(1,1,0) - F(0,1,1) + F(0,0,1) =$
$(1,2,-1) - (-1,1,1) + (-1,0,1) = (1,1-1)$
e questa è proprio la prima colonna della matrice A, Analogamente
$F(0,1,0) = F((0,1,1) - (0,0,1)) = F(0,1,1) - F(0,0,1) =$
$(-1,1,1) - (-1,0,1) = (0,1,0)$
che è la seconda colonna della matrice A. Notiamo che $F(0,0,1)$ è dato nel testo dell'esercizio.

In definitiva

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che in questo caso era particolarmente semplice scrivere le coordinate dei vettori della base canonica rispetto alla base $\{\underline{e}'_j\}$. In generale bisognerà impostare 3 sistemi 3×3. Una soluzione alternativa a questo esercizio è data più avanti, dopo l'esercizio 4.

Possiamo ora utilizzare A per rispondere all'ultimo quesito dell'esercizio. Il rango di A è due, come subito si verifica applicando l'eliminazione di Gauss. L'immagine di F è quindi generata da due vettori colonna di A non-proporzionali, ad esempio il primo ed il secondo. In particolare F non è suriettiva. Ne segue che non è neanche iniettiva; infatti il nucleo di F è il sottospazio vettoriale soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. Dato che il rango è 2 si ha che $\mathrm{Ker}F$ è un sottospazio di dimensione $3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 3. La matrice associata a P rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$ ha come colonne le coordinate di $P(\underline{g}_1), P(\underline{g}_2)$ e $P(\underline{g}_3)$ rispetto alla base $\mathcal{G}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_1) = P(2\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = 2P(\underline{e}_1) + P(\underline{e}_3) &= 2(2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + (\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 5\underline{g}_1 + \underline{g}_2 - 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_2) = P(\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2) = P(\underline{e}_1) + 3P(\underline{e}_2) &= (2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + 3(\underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + \underline{g}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_3) = P(\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = P(\underline{e}_2) + 2P(\underline{e}_3) &= (\underline{g}_2 + \underline{g}_3) + 2(\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta P nella base $\mathcal{G}$ è pertanto

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Una soluzione alternativa a questo esercizio sarà data dopo la soluzione dell'esercizio 4.

Soluzione esercizio 4. Il testo dell'esercizio fornisce l'informazione

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \qquad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2\,;$$

questo vuol dire che il testo dell'esercizio fornisce la matrice richiesta in **4.1**, e cioè la matrice, chiamiamola A_1, associata a T con la scelta di basi:

$$\text{base partenza} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,, \quad \text{base arrivo} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}.$$

Vi ricordo infatti che la matrice A_1 è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T\underline{v}_j$ rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$. Quindi

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si tratta ora di utilizzare la formula (8.4) nel libro di testo per trovare le matrici richieste in **4.2, 4.3, 4.4.**

Cominciamo con **4.2** e sia A_2 la matrice cercata. Sia $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ la matrice identità 2×2. È ovvio che I è invertibile ed uguale alla sua inversa (useremo questa informazione più tardi). La formula (8.4) del libro di Abate ci dice che

$$A_2 = D^{-1} A_1 I = D^{-1} A_1$$

dove D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{v}_1$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{v}_2$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$.
È bene riassumere schematicamente la situazione.
Schematicamente abbiamo

$$A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$
$$\mathbf{A_2} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\} \quad \{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\}$$
$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v_1}} & \underline{\mathbf{v_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} I\,, \quad \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v_1}} & \underline{\mathbf{v_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{vmatrix} D$$
$$\mathbf{A_2} = D^{-1} A_1 I$$

Per determinare D^{-1} possiamo determinare prima D e poi calcolare la sua inversa. Notiamo tuttavia che D non è nota, perché non conosciamo le coordinate di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ [1]. Tanto vale calcolare D^{-1} direttamente: vi ricordo che D^{-1} è la matrice tale che

$$\begin{vmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v_1}} & \underline{\mathbf{v_2}} \end{vmatrix} D^{-1}$$

e cioè la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1 = (1,1)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2 = (1,0)$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Impostando il sistemino $(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(-1,1)$ e risolvendo scopriamo che

$$(1,1) = \frac{2}{3}(1,2) + (-\frac{1}{3})(-1,1)$$

Analogamente

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + (-\frac{2}{3})(-1,1)$$

Ne segue che

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

e quindi in definitiva

$$A_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 5/3 \\ 1/3 & -7/3 \end{vmatrix}$$

Passiamo a **4.3.** Sia A_3 la matrice cercata. È chiaro dalla soluzione di **4.2** che conviene determinare A_3 sulla base di A_2 perché in tale maniera una delle matrici che compaiono nella formula (8.4) del libro di testo sarà l'identità. Ciò sarà chiaro dallo schemino che segue. Schematicamente abbiamo infatti

$$A_2 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$$
$$\mathbf{A_3} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{u_1}}, \underline{\mathbf{u_2}}\} \quad \{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\}$$
$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{u_1}} & \underline{\mathbf{u_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} D^{-1}\,, \quad \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v_1}} & \underline{\mathbf{v_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} I$$

[1] D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{v}_1$ rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{v}_2$ rispetto alla base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

$$\mathbf{A_3} = I^{-1} A_2 D^{-1} = A_2 D^{-1}$$

A questo punto basta fare il prodotto.

Consideriamo **4.4.** e sia A_4 la matrice cercata. In questo caso conviene determinarla utilizzando A_1 oppure A_3. Facciamolo con A_1. Schematicamente abbiamo allora

$$A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$

$$A_4 \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{u_1}}, \underline{\mathbf{u_2}}\} \quad \{\underline{\mathbf{u_1}}, \underline{\mathbf{u_2}}\}$$

$$\left| \; \underline{\mathbf{u_1}} \quad \underline{\mathbf{u_2}} \; \right| = \left| \; \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \; \right| D^{-1}\,, \qquad \left| \; \underline{\mathbf{u_1}} \quad \underline{\mathbf{u_2}} \; \right| = \left| \; \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \; \right| I$$

$$\mathbf{A_4} = I^{-1} A_1 D^{-1} = A_1 D^{-1}$$

e di nuovo basta ora fare il prodotto.

Nuova soluzione esercizio 2. Faremo di nuovo uso della formula (8.4) del libro. In questo caso $V = W (= \mathbb{R}^3)$. Consideriamo la base

$$\underline{e}_1' = (1,1,0) \quad \underline{e}_2' = (0,1,1)\,, \quad \underline{e}_3' = (0,0,1)$$

I dati del problema forniscono immediatamente la matrice A associata ad F rispetto alla seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}\,.$$

Vi ricordo infatti che tale matrice è, per definizione, la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate, nella base di arrivo, del vettore $F(\underline{e}_j')$. Ma questa è proprio l'informazione che ci viene data dal testo del problema. Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Vogliamo ora determinare la matrice A' associata ad F rispetto alla scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \text{base canonica}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}\,.$$

Lo schema è il seguente. Sia I_3 la matrice identità 3×3.

$$A \;\text{ associata a } \quad \{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}\,, \qquad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}.$$

$$\mathbf{A'} \;\text{ associata a } \quad \{\underline{\mathbf{e_1}}, \underline{\mathbf{e_2}}, \underline{\mathbf{e_3}}\}\,, \qquad \{\underline{\mathbf{e_1}}, \underline{\mathbf{e_2}}, \underline{\mathbf{e_3}}\}.$$

$$\left| \; \underline{\mathbf{e_1}} \quad \underline{\mathbf{e_2}} \quad \underline{\mathbf{e_3}} \; \right| = \left| \; \underline{e}_1' \quad \underline{e}_2' \quad \underline{e}_3' \; \right| B, \qquad \left| \; \underline{\mathbf{e_1}} \quad \underline{\mathbf{e_2}} \quad \underline{\mathbf{e_3}} \; \right| = \left| \; \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \underline{e}_3 \; \right| I_3$$

$$\mathbf{A'} = I_3^{-1}\, A\, B = A\, B$$

La matrice B è al momento sconosciuta; d'altra parte essa è l'inversa della matrice B' che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$ nella base $\{\underline{\mathbf{e_1}}, \underline{\mathbf{e_2}}, \underline{\mathbf{e_3}}\}$ (che è la base canonica). Quest'ultima matrice è invece nota perché è data nel testo del problema

$$B' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Quindi

$$B = (B')^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1}$$

da cui, calcolando l'inversa,

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nuova soluzione esercizio 3. I dati del problema ci danno la matrice A che rappresenta l'applicazione lineare P rispetto alla base canonica come base di partenza e alla base $\mathcal{G}$ come base di arrivo. Abbiamo

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice richiesta dall'esercizio è la matrice A' associata alla scelta $\mathcal{G}$ in partenza e in arrivo. Siete ormai esperti e scrivo direttamente la conseguenza della magica formula (8.4) (fatevi voi lo schemino per convincervi che non ho sbagliato)

$$A' = I_3^{-1} \cdot A \cdot B$$

La matrice B è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base $\mathcal{G}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dai dati dell'esercizio abbiamo pertanto

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Otteniamo così

$$A' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 5. Supponiamo che $V = U \oplus W$. Sia $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ e supponiamo che esista un'altra decomposizione $\underline{v} = \underline{u}' + \underline{w}'$; dobbiamo dimostrare che $\underline{u} = \underline{u}'$ e $\underline{w} = \underline{w}'$. Ma per ipotesi $\underline{u} + \underline{w} = \underline{u}' + \underline{w}'$ (sono entrambi uguali a $\underline{v}$) e quindi $\underline{u} - \underline{u}' = \underline{w}' - \underline{w}$; sia $\underline{g}$ il vettore $\underline{u} - \underline{u}'$. Allora $\underline{g} \in U$ (ovviamente); ma per quanto abbiamo scoperto si ha anche $\underline{g} \in W$ (infatti $\underline{g}$ è anche esprimibile come somma di vettori in W). Dato che per ipotesi $U \cap W = \underline{0}$ abbiamo $\underline{g} = \underline{0}$ e quindi $\underline{u} = \underline{u}'$ e $\underline{w} = \underline{w}'$; ne segue che la decomposizione è unica.
Viceversa: se la decomposizione è unica deve essere $U \cap W = \underline{0}$ perché se $\underline{f} \in U \cap W$, $\underline{f} \neq \underline{0}$ allora $\underline{f} = \underline{f} + \underline{0}$ e $\underline{f} = \underline{0} + \underline{f}$ sarebbero due decomposizioni distinte, contro l'ipotesi di unicità. Ne segue che deve essere $\underline{f} = \underline{0}$ da cui $U \cap W = \underline{0}$.

Soluzione esercizio 6.5. Per la linearità delle proiezioni procediamo come segue (vedi anche pag. 87 del testo). Sia $\underline{v} + \underline{v}' \in \mathbb{R}^3$. Allora, rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$ sarà $\underline{v} + \underline{v}' = (\underline{v} + \underline{v}')_1 + (\underline{v} + \underline{v}')_2$. D'altra parte possiamo decomporre $\underline{v}$ e $\underline{v}'$ singolarmente e si avrà $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$. e $\underline{v}' = \underline{v}_1' + \underline{v}_2'$.

Sommando queste due espressioni e applicando le proprieità della somma di vettori otteniamo $\underline{v} + \underline{v}' = (\underline{v}_1 + \underline{v}'_1) + (\underline{v}_2 + \underline{v}'_2)$ e per l'unicità si ha

$$(\underline{v} + \underline{v}')_1 = \underline{v}_1 + \underline{v}'_1\,, \quad (\underline{v} + \underline{v}')_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}'_2$$

che si legge anche

$$P_1(\underline{v} + \underline{v}') = P_1(\underline{v}) + P_1(\underline{v}')\,, \quad P_2(\underline{v} + \underline{v}') = P_2(\underline{v}) + P_2(\underline{v}')$$

da cui l'additività. La dimostrazione che $P_j(\lambda\underline{v}) = \lambda P_j(\underline{v})$ è simile. Consideriamo una base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ fatta nel seguente modo: $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ sono vettori di π, mentre $\underline{g}_3$ è un vettore di r. Allora, per definizione di proiezione su un piano di $\mathbb{R}^3$ parallelamente ad una retta data, si ha [2]

$$P_2(\underline{g}_1) = \underline{g}_1;\ P_2(\underline{g}_2) = \underline{g}_2;\ P_2(\underline{g}_3) = 0.$$

Ne segue che la matrice che rappresenta la proiezione P_2 rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ scelta sia come base di partenza che di arrivo è la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matrice A' che rappresenta la proiezione P_2 nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ si ottiene a partire da A con un cambio di base:

$$A' = B^{-1} \cdot A \cdot B$$

dove B è la matrice del cambio di base, dalla base $\mathcal{G}$ alla base canonica. Equivalentemente

$$A' = C \cdot A \cdot C^{-1}$$

con $C (= B^{-1})$ la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base $\mathcal{G}$. C è quindi la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Per determinare esplicitamente C dobbiamo pertanto determinare esplicitamente una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Come abbiamo detto, i vettori $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ devono formare una base di π. Li determiniamo pertanto risolvendo l'equazione che definisce π: da $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ricaviamo $x_1 = x_2 + x_3$, ovvero

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\}$ per π è pertanto

$$\underline{g}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \qquad \underline{g}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Infine, $\underline{g}_3$ deve essere un vettore (non nullo) appartenente alla retta r. Dai dati del problema troviamo subito che una possibile scelta di $\underline{g}_3$ è

$$\underline{g}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

[2]ragionate sul fatto che la proiezione sul piano parallelamente alla retta lascia fissi i vettori del piano e manda i vettori della retta nel vettore nullo; ciò dovrebbe essere chiaro geometricamente ma segue ovviamente anche dalla definizione di proiezione in termini della decomposizione

Con queste scelte di $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ troviamo

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

ovvero, nelle coordinate x_1, x_2, x_3 di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica, la proiezione P_2 è l'applicazione lineare

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 - x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} ; \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} ; \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ,$$

come dev'essere.