Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 17/11/06

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1 := (1,0), \underline{e}_2 := (0,1)\}$ fissata; vi faccio notare che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio $\underline{x}$. Consideriamo una seconda base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$\underline{v}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{v}_2 = (1,-1)$$

e siano (y_1, y_2) le coordinate associate a questa base.
Determinare le formule di cambiamento di coordinate

$$\underline{x} = B\underline{y}\,, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$. È facile verificare che l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

è ben definita [1].
Consideriamo la base canonica

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Studiare iniettività e suriettività di F.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ definita da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{1}$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (1,2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1,1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1,0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2$$

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di coordinate risolvere i seguenti esercizi:

4.1 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

4.2 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

[1] i tre vettori $\{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

4.3 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

4.4 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due sottospazi. Supponiamo che $V = U + W$.
Dimostrare che $V = U \oplus W$ se e solo se ogni vettore di V si scrive in maniera *unica* come somma di un vettore in U e di un vettore in W.

Esercizio 6 . Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Sappiamo che : $V = r \oplus \pi$; quindi ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$.
Definiamo un'applicazione $P_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione.
6.1 Verificare che l'applicazione P_1 è *lineare.* (Suggerimento: usare l'unicità di cui nell'esercizio precedente.) Essa è, per definizione, la proiezione su r parallelamente a π.

La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su π parallelamente a r; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite P_2. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$.
Abbiamo altre due applicazione *lineari* definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π e la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r:

$$S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

6.2 Disegnate π, r ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
6.3. Determinare l'immagine ed il nucleo di P_1 e P_2. Spiegare perché S_1 e S_2 sono biunivoche.
6.4 Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_2 = \mathrm{Id} - P_1\,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}\,.$$

È bene ricordare che se $T : V \to V$ è un'applicazione lineare allora T^2 è per definizione l'applicazione $T \circ T$ (che sappiamo essere ancora lineare) . In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
Suggerimento: dire che due applicazioni $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sono uguali vuol dire che $S(\underline{w}) = T(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$. Nel primo caso si tratta di dimostare che $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha $P_1(P_1(\underline{v})) = P_1(\underline{v})$...Fate una figura per aiutarvi.
6.5. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione P_2 sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta $r = \mathbb{R}(1, 2, 1)$.
Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P_2 è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[2] Una volta scritta la matrice associata a P_2 in questa "base speciale", l'esercizio può essere completato utilizzando la formula (8.5) pag 140.

Esercizio 7 . Svolgere l'esercizio 9.3 del libro.

[2]Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce P_2 sui vettori del piano π e sui vettori della retta r.