Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Esonero del 14/11/06 con soluzione

Esercizio 1. Dare l'espressione in coordinate[1] di un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ che soddisfi le due seguenti proprietà:

- $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Span}((1,1))$ (per ragioni tipografiche scriveremo spesso le n-ple come righe e non come colonne).
- $\mathrm{Im}T \subset W$ con W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Soluzione. Un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base. Il testo dell'esercizio ci fornisce il valore di T sul vettore $(1,1)$ (infatti, $T(1,1) = \underline{0}$); conviene allora scegliere come base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio,

$$(1,1) \quad (0,1)$$

Rimane da decidere dove mandare $(0,1)$; scegliamo un qualsiasi vettore di W, ad esempio $(1,1,2,0)$. In definitiva

$$T(1,1) = \underline{0}\,, \quad T(0,1) = (1,1,2,0)$$

univocamente definisce un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}^4$ che soddisfa le proprietà richieste. Per l'espressione in coordinate utilizziamo la linearità:

$$T\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = T(x_1\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}) = T(x_1(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}) + x_2\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix})$$

$$= -x_1\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Quindi $T = L_C$ con

$$C = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Potevamo anche determinare C ricordando che è la matrice che ha come j-ma colonna la quadrupla $T(\underline{e}_j)$, con $\underline{e}_j$ il j-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.

- Scrivere equazioni cartesiane per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$W := \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}\right)$$

- Scrivere equazioni cartesiane e parametriche per il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$

$$L := \begin{vmatrix} 1 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} + W$$

[1] equivalentemente: derminare C tale che $T = L_C$

Soluzione. Conviene innanzitutto determinare una base di W; è subito visto che tale base è determinata dai due primi vettori. W ha quindi dimensione 2. Deve essere quindi dato da un sistema omogeneo di 2 equazioni in 4 incognite di rango 2. Per determinarlo procediamo come al solito: scriviamo

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right|$$

riduciamo con Gauss ed imponiamo la compatibilità. Otteniamo

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Per determinare le equazioni cartesiane di L possiamo semplicemente applicare la Proposizione 6.4 con

$$B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 3. Determinare tutti i possibili prodotti righe per colonne fra le seguenti matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix}$$

Soluzione. I possibili prodotti sono $AB \in M_{1,2}(\mathbb{R})$, $AC \in M_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $CA \in M_{5,5}(\mathbb{R})$. Il calcolo è elementare.

Esercizio 4. Rispondere alle seguenti domande, giustificando brevemente le risposte.

- Vero o Falso: *un'applicazione lineare* $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ *è sempre suriettiva.*
- Vero o Falso: *un'applicazione lineare* $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ *è sempre non-suriettiva.*
- Vero o Falso: *un'applicazione lineare* $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ *è sempre non-iniettiva*
- Vero o Falso: *un'applicazione lineare* $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ *è sempre iniettiva*
- Vero o Falso: se $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.
- Vero o Falso: se $T : M_{k,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,k}(\mathbb{R})$ è lineare e suriettiva allora è una biezione.
- Vero o Falso: se $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e A è singolare allora BA è anche singolare.

Soluzione.

- falso, ad esempio l'applicazione nulla non è suriettiva
- vero, dal teorema della dimensione
- vero, dal teorema della dimensione
- falso, ad esempio l'applicazione nulla non è iniettiva
- vero, segue dal Corollario 7.8
- vero, dal teorema della dimensione e dal fatto che i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione
- vero, infatti $\operatorname{Ker} L_A$ è non banale, dato che A è singolare; ma allora $\operatorname{Ker} L_{BA} = \operatorname{Ker}(L_B \circ L_A)$ è anche non-banale e quindi BA è singolare.

Esercizio 5. Sia A la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

verificare che A è invertibile; calcolare A^{-1}.

Soluzione. Procedendo come a p. 125 del libro di testo si trova

$$\begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Determinare una base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\underline{f}_1 \in W, \underline{f}_2 \in W$.

Determinare equazioni parametriche di un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Soluzione. Risolvendo il sistema si trova che $W = \mathrm{Span}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$. Per determinare la base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ basterà applicare il metodo del completamento p. 103, punto (e). Altrimenti, in alternativa, fissiamo 2 vettori non-proporzionali fuori da W, ad esempio $\underline{f}_3 = (1, 0, 1, 0), \underline{f}_4 = (0, 1, 0, 1)$. Ci aspettiamo che questi 2 vettori risolvano il nostro problema. Basta dimostrare che la matrice che ha come colonne i 4 vettori è non singolare. La verifica è immediata (con Gauss). Prendiamo poi $U = \mathrm{Span}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$; U ha dimensione 2, inoltre $U + W = \mathbb{R}^4$ e quindi, per Grassmann $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. Le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

Esercizio 7. Sia A la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e si consideri l'applicazione lineare L_A.

- Determinare una base per $\mathrm{Ker} L_A$ e una base per $\mathrm{Im} L_A$.
- Decidere se il vettore $\underline{b} := (1, 4, -3, 2, -1)$ appartiene all'immagine di L_A; decidere se il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è compatibile ed in caso affermativo descrivere $L := \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\}$ nella forma $\underline{v}_0 + W$ per un opportuno vettore $\underline{v}_0 \in \mathbb{R}^5$ e per un opportuno sottospazio W.
- Determinare una base per $L_A(U)$ con U il sottospazio generato da

$$\underline{u}_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \underline{u}_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Soluzione. Riducendo con Gauss si trova che A ha rango 4, con pivots nelle prime 4 colonne. Variabili dipendenti sono quindi x_1, x_2, x_3, x_4, variabile libera x_5. Quindi $\operatorname{Im} L_A$ ha come base le prime 4 colonne di A, mentre risolvendo all'indietro il sistema si trova che $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}(-1, 1, 0, -1, 1)$. Conveniva ovviamente ridurre con Gauss direttamente la matrice completa $A \,|\, \underline{b}$. Si scopriva che il sistema era compatibile; quindi $\underline{b}$ è nell'immagine di L_A (per la Prop. 4.3) e risolvendo all'indietro si scopriva che

$$L = (6, -5, 3, -1, 0) + \operatorname{Span}(-1, 1, 0, -1, 1)\,.$$

Per rispondere all'ultimo quesito:

$$L_A(U) = \operatorname{Span}(L_A(\underline{u}_1), L_A(\underline{u}_2)) = \operatorname{Span}(\underline{0}, L_A(\underline{u}_2)) = \operatorname{Span}((2, 3, 3, 3, 2))$$

quindi una base per $L_A(U)$ è data da $(2, 3, 3, 3, 2)$.