Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 10/11/06

Esercizio 1. *Determinare se la seguente matrice 3×3 è invertibile, ed in caso affermativo calcolare la sua inversa:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Soluzione. Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se è non-singolare, cioè se e solo se il rango è uguale a n. Utilizzando la riduzione di Gauss si verifica facilmente che per la nostra matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ si ha $\mathrm{rg}(A) = 3$. La matrice data è quindi invertibile. Per determinare l'inversa scriviamo

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e applichiamo EG$\downarrow$, EG$\uparrow$ e la divisione per i pivots. Otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

Ne segue che

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2. *Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ i vettori dati da*

$$\underline{v}_1 = (1,2), \quad \underline{v}_2 = (1,-1).$$

Si noti che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Sappiamo che esiste una e una sola applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(1,2) = (0,1), \quad F(1,-1) = (3,1).$$

Determinare la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ tale che $F = L_A$. Avrete bisogno dell'applicazione

$$J : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to M_{22}(\mathbb{R})$$

inversa dell'applicazione

$$L : M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

quest'ultima essendo l'applicazione che manda A in L_A.

Soluzione. Sia $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. La matrice cercata A è la matrice $J(F)$ e cioè la matrice che ha come j-ma colonna $F(\underline{e}_j)$. Quindi, la prima colonna di A è data da $F(1,0)$ e la seconda colonna di A è data da $F(0,1)$. Per calcolare queste 2 coppie esprimiamo $(1,0)$ e $(0,1)$ in funzione di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, sui quali sappiamo calcolare F, e poi applichiamo la linearità. È subito visto che

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + \frac{2}{3}(1,-1), \qquad (0,1) = \frac{1}{3}(1,2) - \frac{1}{3}(1,-1)$$

da cui

$$F(1,0) = F(\frac{1}{3}(1,2) + \frac{2}{3}(1,-1)) = \frac{1}{3}F(1,2) + \frac{2}{3}F(1,-1) = (2,1) = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2\ ;$$

analogamente

$$F(0,1) = F(\frac{1}{3}(1,2) - \frac{1}{3}(1,-1)) = \frac{1}{3}F(1,2) - \frac{1}{3}F(1,-1) = (-1,0) = -\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3. *Siano* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ *i vettori di* $\mathbb{R}^5$ *dati da*

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ *tale che*

$$F(\underline{v}_1) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_2) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_3) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_4) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_5) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

e in caso affermativo:
(i) calcolare l'immagine tramite F *del vettore* $(3,2,1,0,0)$.
(ii) stabilire se F *è iniettiva.*

Soluzione. E' immediato osservare che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^5$. Infatti la matrice che ha per colonne questi vettori è una matrice quadrata triangolare superiore con tutti i pivot diversi da zero, e dunque è non singolare. Ne segue che esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ con le proprietà richieste. Per determinare l'immagine del vettore $(3,2,1,0,0)$ mediante l'applicazione F, calcoliamo le coordinate del vettore $(3,2,1,0,0)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ Cerchiamo cioè i numeri reali x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tali che $x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3 + x_4\underline{v}_4 + x_5\underline{v}_5 = (3,2,1,0,0)$, ovvero cerchiamo le soluzioni del sistema lineare la cui matrice è

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Applicando l'algoritmo di eliminazione di Gauss a salire, troviamo

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

ovvero $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 0)$. In altre parole $(3, 2, 1, 0, 0) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$. A questo punto, per calcolare $F(3, 2, 1, 0, 0)$ basta utilizzare la linearità di F:

$$F(3, 2, 1, 0, 0) = F(\underline{v}_1 + \underline{v}_1 + \underline{v}_3) = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2) + F(\underline{v}_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

L'applicazione F non può essere iniettiva perché non possono esserci applicazioni iniettive da uno spazio vettoriale di dimensione maggiore ad uno di dimensione minore.

Esercizio 4. *Sia $M_{22}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici due per due a coefficienti reali. Determinare un'applicazione iniettiva $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ la cui immagine contenga i vettori*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

.

Soluzione. E' sufficiente determinare una terza matrice A_3 che sia linearmente indipendente dalle due assegnate (e ora vi spiego perché). Ad esempio possiamo prendere la matrice $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, ma ci sono infinite altre scelte possibili. Definiamo T assegnando i suoi valori sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$T(1, 0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad T(0, 1, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad T(0, 0, 1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sappiamo che T lineare è univocamente determinata da questa scelta. Inoltre è chiaro, per costruzione, che l'immagine di T ha dimensione 3 e quindi, per il teorema della dimensione, la dimensione del nucleo è 3-3=0, da cui deduciamo che T è iniettiva. L'immagine del generico vettore (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ mediante T è

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= x\,T(1, 0, 0) + y\,T(0, 1, 0) + z\,T(0, 0, 1) \\ &= x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+z & y \\ x & y \end{vmatrix} \end{aligned}$$