

**Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.**  
**Prof. P. Piazza**  
**Compito a casa del 10/11/06**

**Esercizio 1.** Consideriamo l'elicoide  $S$  parametrizzato da

$$\phi(t, s) = (s \cos t, s \sin t, t), \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Sia  $R \subset S$  l'immagine tramite  $\phi$  di  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Dopo aver spiegato perché  $R$  è una regione regolare di  $S$ , calcolare  $\text{Area}(R)$ . Calcolare la lunghezza della curva in  $S$  ottenuta prendendo la frontiera di  $R$ .

**Esercizio 2.** Sia  $S$  il cono ad una falda privato del suo punto singolare:

$$S = \{(x, y, z), x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

Dare una parametrizzazione di  $S$ .

Descrivere l'immagine di  $S$  in  $S^2$  tramite l'applicazione di Gauss. Sia  $p = (1/2, \sqrt{3}/2, 1) \in S$ . Determinare, direttamente, la matrice associata a  $dN(p)$  nella base associata alla vostra parametrizzazione. Determinare nuovamente tale matrice facendo uso della prima e seconda forma fondamentale e della formula pag. 196.

**Esercizio 3.** Sia  $S$  l'elicoide dell'Esercizio 1. Calcolare la base indotta da  $\phi$  in  $T_p S$ , con  $p = (0, 1, \pi/2)$ . Calcolare l'espressione in coordinate di  $I_p(\underline{v})$ . Calcolare la matrice associata a  $dN(p)$  in tale base. Calcolare poi l'espressione in coordinate di  $Q_p(\underline{v})$ .

**Esercizio 4.** Sia  $S$  la superficie di equazione  $xyz = 1$ . Sia  $p = (1, 1, 1) \in S$ . Determinare una parametrizzazione locale intorno a  $p$ . Determinare  $I_p$  e la matrice associata a  $dN(p)$  nella base di  $T_p S$  indotta dalla parametrizzazione scelta. Determinare le curvatures principali in  $p$ ; determinare direzioni principali.

**Esercizio 5.** Sia  $T$  il toro ottenuto ruotando intorno all'asse  $y$  la circonferenza  $C$  del piano  $z = 0$  di raggio 1 e centro  $(2, 0, 0)$ . Fate una figura.

- Determinare i punti ellittici, iperbolici e parabolici di  $T$ .
- Sia  $D = T \cap \{y = 0\}$ . Calcolare le direzioni asintotiche nei punti iperbolici di  $D$  (vedi pag 205) .