Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Soluzione compito pomeridiano del 9/11/06

Soluzione esercizio 1. Per ipotesi $n = \dim V$ e $m = \dim W$. La **1.1** è vera, infatti, per il teorema della dimensione $\dim \operatorname{Ker} T = n - \dim \operatorname{Im} T$. Dato che $\operatorname{Im} T \subset W$, si ha $\dim \operatorname{Im} T \le m$; per ipotesi $n - m > 0$, e quindi $n - \dim \operatorname{Im} T > 0$. Conclusione: $\dim \operatorname{Ker} T > 0$ e T non può essere iniettiva. La **1.2** è anche vera, infatti, sempre per il teorema della dimensione $\dim \operatorname{Im} T = n - \dim \operatorname{Ker} T$. Dato che $\dim \operatorname{Ker} T \ge 0$ si ha che $\dim \operatorname{Im} T \le n$ ed essendo per ipotesi $n < m$ ne segue che $\dim \operatorname{Im} T < m$ e quindi T non può essere suriettiva.

Soluzione esercizio 2. Siano $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k$ vettori linearmente indipendenti di V. Vogliamo mostrare che i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono linearmente indipendenti in W. Per linearità di F si ha

$$\alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_k F(\underline{v}_k) = 0 \Leftrightarrow F(\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k) = 0$$

ovvero se e solo se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k \in \ker F$. Ma F è iniettiva per ipotesi, dunque $\ker F = \{0\}$; ne segue $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = 0$. Ma i vettori $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, dunque dev'essere $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ come volevamo dimostrare.

Sia ora V_0 un sottospazio di dimensione k di V e sia $W_0 := F(V_0)$ la sua immagine in W. Essendo immagine di un sottospazio mediante un'applicazione *lineare*, W_0 è un sottospazio di W. Dobbiamo solo dimostrare che W_0 ha dimensione k. Poiché V_0 ha dimensione k, esisterà una base $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ di V_0. Questi vettori sono indipendenti in V e dunque, per la prima parte dell'esercizio, i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono indipendenti in W. Inoltre $F(\underline{v}_i) \in F(V_0) =: W_0$, dunque i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono vettori indipendenti di W_0. Essi sono anche un sistema di generatori per W_0. Infatti se $\underline{w} \in W_0$ allora $\underline{w} = F(\underline{v})$ per qualche $\underline{v} \in V_0$. Poiché $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ è una base di V_0, esistono scalari α_i tali che $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots \alpha_k \underline{v}_k$. Ne segue

$$\underline{w} = F(\underline{v}) = \alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots \alpha_k F(\underline{v}_k)$$

Abbiamo così dimostrato che $\{F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)\}$ è un sistema di generatori indipendenti per W_0, ovvero è una base di W_0; essendo costituita da k elementi, si ha $\dim W_0 = k$.

Osserviamo che abbiamo dimostrato qualcosa di più forte: *un'applicazione lineare iniettiva manda vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W* e, analogamente, *un'applicazione lineare iniettiva manda sottospazi k-dimensionali di V in sottospazi k-dimensionali di W*

Soluzione esercizio 3. Si ha

$$AB = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. Un modo di risolvere questo esercizio è quello di esprimere U e V come soluzioni di sistemi lineari omogenei e trovare poi una base di $U \cap V$ risolvendo il sistema ottenuto prendendo sia le equazioni per U che le equazioni per V.

Prima di tutto osserviamo che V ha dimensione 2, dato che i due vettori sono chiaramente non-proporzionali. Per trovare una base di U operiamo una riduzione

di Gauss sulla matrice
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$
Scopriamo in questo modo che U ha dimensione 2 e che una base è data, ad esempio, dai primi due vettori della matrice. Ora operiamo con Gauss su
$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & -2 & x_2 \\ -3 & 0 & x_3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{array}\right|$$
e otteniamo
$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 0 & 6 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - x_3 \end{array}\right|$$
da cui deduciamo che
$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}\,, \qquad V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}\,.$$
Quindi $U \cap V$ è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
Risolvendo il sistema troviamo che $U \cap V = \mathrm{Span}(-7/5, 2/5, 1)$.

Soluzione esercizio 5. Procedendo come nell'esercizio precedente determiniamo innanzitutto basi per questi due sottospazi. Scopriamo che
$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix}\right).$$
È chiaro che queste due coppie di vettori sono basi rispettivamente per U e V. Vi ricordo che dobbiamo verificare che $U+V = \mathbb{R}^4$ e $U \cap V = \underline{0}$. Avendo determinato basi per U e V notiamo peró che non dobbiamo verificare entrambe le condizioni: infatti, applicando la formula di Grassmann scopriamo che se i 2+2=4 vettori trovati sono linearmente indipendenti, allora, essendo necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$, si deve avere $\dim U \cap V = 0$, dato che $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-4$. Per verificare se i quattro vettori sono linearmente indipendenti basta mettere i 4 vettori in colonna e ridurre con Gauss. Scopriamo che il rango della relativa matrice 4×4 è proprio 4; ne segue che i 2+2=4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi, necessariamente, una base di $\mathbb{R}^4$, come volevasi. Conclusione: $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.
Un modo alternativo per risolvere l'esercizio era il seguente:
troviamo equazioni per U e per V, una volta appurato come sopra che hanno entrambi dimensione 2. Prendendo le 2+2 equazioni ottenute, andiamo a studiare $U \cap V$, come nell'esercizio precedente, risolvendo il sistema di 4 equazioni e 4 incognite che ne risulta ; scopriamo che $U \cap V = \{\underline{0}\}$. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(U + V) = 4$ e quindi che $U + V = \mathbb{R}^4$. Ne segue ancora una volta che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

Soluzione esercizio 6. Sappiamo che
$$\mathrm{Ker}(F_A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, F_A(\underline{x}) = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}\,;$$

basta allora risolvere il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ trovandone una base. Abbiamo visto molti esercizi di questo tipo: riducendo con Gauss, risolvendo il sistema e "mettendo in evidenza le variabile libere" otteniamo che

$$\operatorname{Ker}(F_A) = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Dato che il necleo è non banale, ne segue che F_A non è iniettiva.
Abbiamo visto che $\mathrm{Im}F_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A; la riduzione di Gauss, già effettuata, ci dice che i primi due vettori colonna di A sono una base per lo spazio generato dalle colonne di A. Dato che $\mathrm{Im}F_A$ non è tutto $\mathbb{R}^3$, essendo di dimensione 2, ne segue F_A non è suriettiva.

Soluzione esercizio 7.
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice completa è

$$A|b = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4t \end{array}\right|$$

Per studiare al compatibilità del sistema utilizziamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss:

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4t \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4t-3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4t-3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t-4 \end{array}\right|$$

Dunque il sistema ammette soluzioni solamente se $4t - 4 = 0$ ovvero se e solo se $t = 1$. Per questo particolare valore di t, la matrice del sistema ridotto a scala è

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Le ultime due righe corrsispondono all'identità $0 = 0$ e possono essere eliminate. Rimaniamo così con la matrice

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

che mediante un'ulteriore eliminazione diventa

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Le variabili dipendenti sono x_1 e x_3, quelle libere, x_2, x_4, x_5. Otteniamo,

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \mathrm{Span} \left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

che è proprio la forma richiesta nel testo dell'esercizio. Notiamo che da questa soluzione segue anche che

$$\ker L_A = \mathrm{Span} \left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

Infine, l'immagine di L_A è generata dalle colonne della matrice A. Per estrarre una base basta utilizzare la riduzione di Gauss già operata: i due pivot erano posizionaati nella colonna $j_1 = 1$ e nella colonna $j_2 = 3$. Una base di $\mathrm{Im} L_A$ è data dunque dai due vettori A^1 e A^3. Osserviamo che $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ e

$$\dim \mathrm{Im} L_A = 2 = 5 - 3 = 5 - \dim \ker L_A,$$

come deve essere.

Soluzione esercizio 8. Brevemente: A e B sono le matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$S \circ T = L_{BA}$, proprio per definizione di prodotto righe per colonne. Basta allota calcolare BA per avere C e l'espressione in coordinate di $S \circ T$.