Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza

Compito pomeridiano del 9/11/06

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali e $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
1.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n > m$ l'applicazione lineare T non può essere iniettiva.
1.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n < m$ l'applicazione lineare T non può essere suriettiva.
Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 2. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un isomorfismo. Verificare che F trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W. Dedurne che F trasforma sottospazi di dimensione k di V in sottospazi di dimensione k di W.

Esercizio 3. Calcolare il prodotto righe per colonne AB, con

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 4. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare una base di $U \cap V$.

Esercizio 5. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Esercizio 6. Sia $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare ad essa associata. Determinare una base per $\mathrm{Ker}(L_A)$ ed una base per $\mathrm{Im}(L_A)$. Studiare iniettività e suriettività di L_A. Dire se L_A è invertibile.

Esercizio 7. Si consideri il sistema di 4 equazioni in 5 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 4t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Scrivere la matrice A dei coefficienti del sistema. Scrivere la matrice completa del sistema. Studiare la compatibilità del sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$. Sia $t = 1$. Determinare l'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^5$ delle soluzioni del sistema. Scrivere Σ nella forma $\underline{v}_0 + \operatorname{Span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell)$ per opportuni $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell$ in $\mathbb{R}^5$. Sia L_A l'applicazione lineare definita dalla matrice A dei coefficienti del sistema. Determinare una base per $\operatorname{Ker} A$ ed una base per $\operatorname{Im} L_A$.

Esercizio 8. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare la cui espressione in coordinate è data da

$$T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{vmatrix}$$

Determinare A tale che $T = L_A$. Sia $S : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui espressione in coordinate è data da:

$$S \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 + y_2 + y_3 - y_5 \\ y_3 + y_4 \end{vmatrix}$$

Determinare B tale che $S = L_B$. Determinare l'espressione in coordinate di $S \circ T$. Determinare C tale che $S \circ T = L_C$.