Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 3/11/06

Soluzione esercizio 1. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Operando con Gauss [1] otteniamo la matrice a scala:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha due pivot:
$p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$
$p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 3$.
S, e quindi A, ha rango 2; ne segue che la dimensione di U, che è per definizione la dimensione di $\mathrm{Ker} A$, è uguale a $5 - 2 = 3$.
Per rispondere al secondo quesito risolviamo il sistema, trovando quindi una base di $U (= \mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} S)$. Le variabili dipendenti nel sistema a scala sono x_1 e x_3; quelle libere x_2, x_4, x_5. Esplicitando rispetto alle variabili dipendenti otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + x_5 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

e quindi, ragionando come al solito,

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

I tre vettori trovati sono necessariamente linearmente indipendenti e sono quindi una base di U. Torniamo alla domanda **1.2**: basterà scegliere $\ell = 3$ e l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ definita univocamente dalla legge

$$\underline{e}_1 \to \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{e}_2 \to \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{e}_3 \to \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Questa è l'applicazione L_C con $C \in M_{5,3}(\mathbb{R})$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

[1](Terza riga $\longrightarrow$ Terza riga - Prima riga); poi (Terza riga $\longrightarrow$ Terza riga - Seconda riga)

Dato che $\dim \mathrm{Ker} L_C = 3 - \mathrm{rg} C = 3 - 3 = 0$, ne segue che L_C è iniettiva. L'applicazione L_C fornisce quindi una parametrizzazione di U.

Per scrivere equazioni parametriche di U basterà considerare la base di U trovata sopra: $\underline{x} \in U$ se e solo se $\underline{x}$ è combinazione lineare di quei tre vettori. Otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = s + t + u \\ x_2 = s \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \\ x_5 = u \end{cases} \tag{1}$$

e al variare di $s, t, u \in \mathbb{R}$ otteniamo tutti i vettori di U. Le (1) sono quindi le equazioni parametriche di U.

Soluzione esercizio 2. Procediamo come spiegato nel libro di testo , Esempio 6.11. Quindi $\underline{x} \in W$ se e solo se il sistema $A\underline{v} = \underline{x}$ ha soluzione, con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Riducendo a scala

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ -1 & -1 & x_4 \\ 0 & -1 & x_5 \end{array}\right|$$

otteniamo

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & x_4 + x_1 \\ 0 & 0 & x_5 + x_2 \end{array}\right.$$

Imponendo la compatibilità otteniamo le equazioni cartesiane di W che sono

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 3. Abbiamo equazioni cartesiane per U e W; è ovvio che $U \cap W$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema ottenuto considerando le equazioni di U **e** le equazioni di W:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Basterà allora ridurre con Gauss e risolvere come al solito.

Soluzione esercizio 4. Procedendo come nell'esercizio 2 scopriamo che il sottospazio $W = \text{Span}(1, -1, 2)$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

cioè $B\underline{x} = \underline{0}$ con

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Basta allora applicare la Proposizione 6.4. Le equazioni cartesiane del sottospazio affine sono

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Soluzioni esercizio 5.
5.0 L'espressione di Q in coordinate è

$$Q(\underline{x}) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}.$$

5.1 Si ha

$$\text{Ker}Q = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \}$$

e si tratta come al solito di risolvere il sistema e trovare una base per lo spazio delle soluzioni. Si trova un nucleo di dimensione 1 generato dal vettore $(3, 5, 2)$. Lo spazio immagine ha dimensione 2, generato ad esempio dalle prime 2 colonne di A che sono chiaramente non-proporzionali. L'applicazione lineare Q non è iniettiva, dato che il nucleo è non banale; Q non è suriettiva, dato che l'immagine ha dimensione 2. Equazioni parametriche di Ker$Q$ sono

$$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = 2t \end{cases}$$

equazioni parametriche per l'immagine sono

$$\begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = 2s \\ x_3 = -2t \end{cases}$$

Equazioni cartesiane si ottengono dalle basi di Ker$Q$ e Im Q procedendo come negli esercizi precedenti.
Per determinare la controimmagine di $(2, -1, 5)$ tramite Q basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = -1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

5.2 Risolvendo il sistema scopriamo che la retta è generata dal vettore $(1, -2, 1)$. Questo vettore viene trasformato in $(4, -1, 1)$ da Q. L'immagine della retta è il sottospazio generato da $(4, -1, 1)$ [2].
5.3 $Q(\pi)$ si ottiene fissando una base di π e trasformandola con Q. Vediamo i

[2] per capire questo punto ragioniamo come segue: sia r la retta; allora $Q(r) = \{Q(\underline{v}), \underline{v} \in r\} = \{Q(\alpha(1, -2, 1)), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha Q(1, -2, 1), \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(Q(1, -2, 1)) = \text{Span}(4, -1, 1)$

dettagli; un base di π è data da $\{\underline{v}_1 = (1,0,1), \underline{v}_2 = (0,1,0)\}$. Si ha allora:
$Q(\pi) = \{Q(\underline{v}), \underline{v} \in \pi\} = \{Q(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} =$
$\{\alpha_1 Q(\underline{v}_1) + \alpha_2 Q(\underline{v}_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(Q\underline{v}_1, Q\underline{v}_2) = \mathrm{Span}((2,-1,5),(-1,0,3))$
Conclusione: l'immagine tramite Q di π è un piano e più precisamente il piano $\mathrm{Span}((2,-1,5),(-1,0,3))$.
5.4 Una base per σ è data da $\{\underline{w}_1 = (3,5,0), \underline{w}_2 = (0,0,1)\}$; procedendo come nel punto precedente troviamo che l'immagine di σ tramite Q è data da
$\mathrm{Span}(Q\underline{w}_1, Q\underline{w}_2) = \mathrm{Span}(Q(3,5,0), Q(0,0,1)) = \mathrm{Span}((-2,6,-10),(1,-3,5))$.
In questo caso l'immagine di σ ha dimensione 1 (infatti i due vettori nell'ultimo span sono proporzionali). Conclusione: $Q(\sigma)$ è la retta generata da $(1,-3,5)$.
Le equazioni parametriche dell'immagine di σ tramite Q sono ottenute come negli esercizi precedenti.
Per spiegare come sia possibile che l'immagine di π abbia dimensione 2 mentre quella di σ abbia dimensione 1 osserviamo che σ contiene il nucleo di Q mentre π ha intersezione banale con tale nucleo.

Soluzione esercizio 6 . L'applicazione lineare F univocamente determinata da

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$F(1,1) = (1,1,1)\,, \quad F(0,1) = (1,-1,1)$$

è un'applicazione che soddisfa le proprietà richieste. Infatti: è ben definita perché ne diamo i valori su una base di $\mathbb{R}^2$, ha immagine di dimensione 2 dato che i vettori immagine $(1,1,1)$ e $(1,-1,1)$ sono linearmente indipendenti; è quindi iniettiva dato che la dimensione del suo nucleo è $2-2=0$.
Per determinare la sua espressione in coordinate basta utilizzare la linearità:
$F(x_1,x_2) = F(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) = x_1F(\underline{e}_1) + x_2F(\underline{e}_2)$, con $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.
Ma $F(\underline{e}_1) = F(1,0) = F((1,1)-(0,1)) = F(1,1) - F(0,1) = (0,2,0)$, mentre già sappiamo che $F(\underline{e}_2) = F(0,1) = (1,-1,1)$.
Conclusione:

$$F\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Una F non iniettiva si otteneva mandando $(1,1)$ in $(1,1,1)$ e mandando $(0,1)$ in un vettore proporzionale a $(1,1,1)$.