Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 3/11/06

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ definito come l'insieme degli $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$ soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

1.1 Determinare la dimensione di U.
1.2 Determinare $\ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e un'applicazione lineare iniettiva $A : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^5$ che abbia come immagine U.
1.3 Determinare equazioni parametriche per U.

Esercizio 2. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ definito da

$$W = \mathrm{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right| , \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right| \right)$$

Esercizio 3. Determinare una base per $U \cap W$.

Esercizio 4. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ parallelo al sottospazio $W = \mathrm{Span}(1, -1, 2)$ e contenente il vettore $\underline{v}_0 := (0, 1, 0)$.

Esercizio 5. (Molto istruttivo) Sia $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{array} \right| .$$

(5.0) Scrivere l'espressione di Q in coordinate.
(5.1) Determinate equazioni cartesiane e parametriche per $\mathrm{Ker}(Q)$ e $\mathrm{Im}\, Q$. Studiare l'iniettività/suriettività di Q. Determinare la controimmagine del vettore $(2, -1, 5)$[1]
(5.2) Determinare l'immagine tramite Q della retta[2] di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(5.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine del piano π di equazione $x_1 - x_3 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\pi)$?
(5.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del piano σ di equazione $5x_1 - 3x_2 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\sigma)$?
Confrontare le dimensioni di $Q(\pi)$ e $Q(\sigma)$. C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ?
Cercate di spiegare cosa succede.

---

[1] Vi ricordo che se $f : A \to B$ è un'applicazione fra insiemi, allora la controimmagine di $b \in B$ tramite f è il sottoinsieme di A definito da $\{a \in A \,|\, f(a) = b\}$. Analogamente si definisce la controimmagine di un sottoinsieme di B. La controimmagine di b tramite f viene denotata con $f^{-1}(b)$.

[2] Se $f : A \to B$ è un'applicazione fra insiemi, allora l'immagine di un sottoinsieme A' di A mediante f è il sottoinsieme di B definito da $f(A') = \{f(a) |\, a \in A'\}$.

Esercizio 6 . Determinare l'espressione in coordinate di un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che trasformi il vettore $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ nel vettore $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ ed abbia nucleo banale (quindi *iniettiva*). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio immagine della vostra F. (La risposta non è, ovviamente, unica). Rifate questo esercizio imponendo sempre che F trasformi $(1, 1)$ in $(1, 1, 1)$ ma richiedendo ora che il nucleo sia non banale. Fate delle figure che illustrino le vostre costruzioni.