Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Soluzione del compito a casa del 31/10/06

Soluzione esercizio 1. Diamo la soluzione più breve. Sappiamo che se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ allora $n = \dim \mathrm{Ker} A + \mathrm{rg} A$, dove il nucleo di A,

$$\mathrm{Ker} A \equiv \mathrm{Ker} L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A \underline{x} = \underline{0}\},$$

altri non è che *il sottospazio* di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare *omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$. Questo vuol dire che $\dim \mathrm{Ker} A = n - \mathrm{rgA}$. In parole, *la dimensione del sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$ *è data dal numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti del sistema.*
Nel nostro caso U è l'insieme delle soluzioni di un sistema di **1** equazione in **3** incognite: $U = \mathrm{Ker} A$ con $A = |1\ -1\ -1| \in M_{13}(\mathbb{R})$. Ma allora $\dim U = 3 - \mathrm{rg} A$. Dato che ovviamente $\mathrm{rgA} = 1$ [1] si ha $\dim U = 3 - 1 = 2$. Conclusione: $\dim U = 2$. Analogamente $\dim W = 2$. Ma allora, per Grassmann,

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U + W) = 4 - \dim(U + W)\,.$$

Ora, $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed ha quindi dimensione ≤ 3. Ma allora $\dim(U \cap W) \geq 1$. In ogni caso $(U \cap W) \neq \underline{0}$ e $\mathbb{R}^3$ non è somma diretta.

Osservazione 1. Ovviamente avremmo potuto calcolare l'intersezione di U e di W che è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Avremmo potuto risolvere esplicitamente il sistema ed avremmo trovato che $U \cap W = \mathrm{Span}((1, -2, 3))$.
In generale se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.
Osservazione 2. Notiamo anche che senza risolvere il sistema, ma osservando che $U \cap W$ è dato dalle soluzioni di (1), avremmo potuto subito concludere che $\dim(U \cap W) = 1$. Infatti:

$$\dim(U \cap W) = 3 - \mathrm{rg} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ma la matrice A in questa formula ha rango 2 (infatti $\mathrm{rg} A \leq \min\{2, 3\} = 2$ e le prime due colonne sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali, quindi $\mathrm{rg} A = 2$). Conclusione: $\dim(U \cap W) = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 2. Sappiamo che U ha dimensione 2. È ovvio che W ha dimensione 1. Inoltre $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ma allora è subito visto che $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Ne segue che $\dim(U \cap W) = 0$. Ma allora, per Grassmann, $\dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. Ne segue che $U + W \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim(U + W) = 3$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^3$. Conclusione: in questo caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ perché $U + W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

[1] perché $\mathrm{rg} A$ =max numero di colonne lin. indip. = max numero di righe lin. indip.

Soluzione esercizio 3. L_A è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}L_A = \{\underline{0}\}$. Occorre allora calcolare

$$\mathrm{Ker}L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L_A\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Utilizzando Gauss è facile vedere che $\mathrm{Ker}L_A = \{\underline{0}\}$. Ne segue che L_A è iniettiva. Per il teorema della dimensione (andiamo da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$) è anche suriettiva. Ne segue che L_A è biettiva. L'immagine di $(1, 2, 1)$ è data sostituendo nella definizione di L_A,

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix},$$

i valori 1,2 e 1 al posto di x_1, x_2 e x_3 rispettivamente. Otteniamo il vettore $(6, 3, 0)$. L'immagine del j-mo vettore della base canonica è la j-ma colonna della matrice A.

Soluzione esercizio 4.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}$$

Per determinare la dimensione del nucleo troviamo prima una base per lo spazio immagine (in ogni caso questo è un quesito al quale dobbiamo rispondere), cioè per lo spazio generato dalle colonne di A. Il numero di elementi in questa base è per definizione la dimensione di $\mathrm{Im}\, L_A$ e si ha $\dim \mathrm{Ker}A = 3 - \dim \mathrm{Im}\, L_A \equiv 3 - \mathrm{rg}A$. Ora, le prime due colonne sono ovviamente linearmente indipendenti. Dobbiamo quindi decidere se tutte e tre le colonne sono o meno linearmente indipendenti. Questo lo sappiamo fare; si scopre che non lo sono. Ne segue che una base di $\mathrm{Im}\, L_A$ è costituita dalle prime due colonne. In particolare $\dim \mathrm{Im}\, L_A = 2$ e $\dim \mathrm{Ker}L_A = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 5. Basta verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 1), \quad \underline{v}_3(0, 1, -1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché allora possiamo applicare la Proposizione 5.2 del libro di Abate-de Fabritiis. Si verifica con il solito metodo già visto varie volte che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Sono quindi una base in $\mathbb{R}^3$.

Per determinare $F(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$, $F(0, 0, 1)$ dobbiamo espimere i vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in funzione di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e poi applicare la linearità. Si ha $(1, 0, 0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $(0, 1, 0) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$, $(0, 0, 1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_3)$ e quindi

$$F(1, 0, 0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = (2, 3, 2) - (1, 3, 2) = (1, 0, 0)$$

$$F(0, 1, 0) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1, 3, 2) + (1, 1, -2)) = (1, 2, 0)$$

$$F(0, 0, 1) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2\underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1, 3, 2) - (1, 1, -2)) = (0, 1, 2)$$

SOLUZIONE ULTERIORI ESERCIZI

Soluzione esercizio 6. W ha dimensione $5-1=4$. Sia $\underline{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^5$ non appartenente a W; basta prendere un vettore che non soddisfa l'equazione che definisce W, ad esempio $\underline{u}=(1,1,1,1,1)$. Allora $\mathrm{Span}(\underline{u})=\{(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha),\alpha\in\mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 ed ha intersezione banale con W: $U\cap W=\{\underline{0}\}$. Per Grassmann $\dim(U+W)=4+1-0=5$; ma allora $U+W=\mathbb{R}^5$. Conclusione $\mathbb{R}^5=W\oplus U$. Se scegliamo $U'=\mathrm{Span}(\underline{u}')$ con $\underline{u}'\notin W$ e $\underline{u}'\neq\underline{u}$ allora $\mathbb{R}^5=W\oplus U'$ ma $U\neq U'$.

Soluzione esercizio 7. È chiaro che rgA = B = 2; quindi $\dim U=\dim W=4-2=2$. L'intersezione ha dimensione $4-\mathrm{rg}C$ con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$. Applicando Gauss vediamo che C è non-singolare e quindi $\mathrm{rg}C=4$. Ne segue che $U\cap W=\{\underline{0}\}$; per Grassmann $\dim(U+W)=4$. Ne segue che $\mathbb{R}^4=U\oplus W$

Soluzione esercizio 8. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Dobbiamo mostrare che anche $A+B$ e λA sono matrici antisimmetriche. Si ha

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=a_{ji}+b_{ji}=(A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}=\lambda\cdot a_{ji}=(\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B,\lambda A\in\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$.

La dimostrazione per lo spazio delle matrici antisimmetriche è perfettamente analoga: se A e B sono due matrici anti simmetriche e λ un numero reale, allora

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=-a_{ji}-b_{ji}=-(A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}=-\lambda\cdot a_{ji}=-(\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B,\lambda A\in\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

È bene osservare che A è simmetrica se e solo se coincide con la sua trasposta: $A=A^T$. Analogamente: A è antisimmetrica se e solo se $A=-A^T$.

È chiaro che se a_{ij} è simultaneamente uguale a a_{ji} ed a $(-a_{ji})$, allora deve essere $a_{ij}=0$. Da questa osservazione segue subito che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})\cap\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})=\underline{0}$. D'altra parte, se $A\in M_{nn}(\mathbb{R})$ allora

$$A=\frac{(A+A^T)}{2}+\frac{(A-A^T)}{2}$$

e dato che il primo addendo a destra appartiene a $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ [2] ed il secondo appartiene a $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ abbiamo dimostrato che $M_{nn}(\mathbb{R})=\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$

Una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ è data dalle 6 matrici

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}$$

[2] infatti $((A+A^T)/2)^T=(A^T+(A^T)^T)/2=(A+A^T)/2$ (dove abbiamo utilizzato il fatto, ovvio, che $(A^T)^T=A$)

Una base di di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ è invece data dalle 3 matrici

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

Ovviamente queste 9 matrici tutte insieme formano una base di $M_{33}(\mathbb{R})$.

In generale, per quanto riguarda le dimensioni, osserviamo che in generale vale $\dim \mathcal{S}_{nn} = n(n+1)/2$ e $\dim \mathcal{A}_{nn} = n(n-1)/2$.