

Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 31/10/06

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 2. Come l'esercizio 1 ma con $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \text{Span}((1, 1, 1))$.

Esercizio 3. Dire se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

è iniettiva. Dire se è biettiva. Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1, 2, 1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica.

Esercizio 4. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A in coordinate: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \dots$

Determinare la dimensione del nucleo di L_A . Determinare una base per lo spazio immagine.

Esercizio 5. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1, 1, 1) = (2, 3, 2), \quad F(0, 1, 1) = (1, 3, 2), \quad F(0, 1, -1) = (1, 1, -2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di \mathbb{R}^n per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$. (*Suggerimento:* esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ e applicare la linearità.)

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$. Determinare un sottospazio U di \mathbb{R}^5 tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^5$. (Determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.) Determinare un secondo sottospazio U' distinto da U ma tale che sia ancora $\mathbb{R}^5 = W \oplus U'$.

Suggerimenti: qual è la dimensione di W ? Che dimensione ci aspettiamo per U ?

Esercizio 7. In \mathbb{R}^4 sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Verificare se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 8. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j . Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j .

8.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.

8.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.

8.3. Verificare che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) = \underline{0}$; verificare che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ (suggerimento: utilizzare il fatto che $A = (A + A^T)/2 + (A - A^T)/2$). Dedurre che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$

8.4 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.