

Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 30/10/06

Esercizio 1. Nel piano $z = 0$ è assegnata l'iperbole di equazioni $\{z = 0, xy = 1\}$. Sia S la superficie ottenuta ruotando tale curva intorno all'asse y . Determinare una parametrizzazione di S ; determinare equazioni cartesiane implicite di S ¹. Determinare un atlante. Verificare che S ha due componenti connesse; descrivere ognuna di esse come grafico di una funzione.

Esercizio 2. Sono date la retta r di equazione $\{x = 0, z = 2y\}$ e la retta s di equazione $\{x = 1, z = y\}$ e si consideri la superficie S ottenuta ruotando s intorno a r . Dare una parametrizzazione di S . Determinare equazioni cartesiane implicite per S . Determinare equazioni parametriche per il parallelo di S di raggio minimo. (Suggerimento: conviene forse cambiare riferimento e far coincidere r con l'asse z ; ricordatevi di ricambiare riferimento alla fine.)

Esercizio 3. Consideriamo le cinque quadriche generali reali (in forma canonica): trovare quelle che sono di rotazione (eventualmente ponendo delle restrizioni sui coefficienti a, b, c). Di ciascuna di esse determinare l'asse di rotazione ed una generatrice.

Esercizio 4. Sia S il paraboloido iperbolico parametrizzato da $\phi(t, s) = (t, s, t^2 - s^2)$. Costruire le due schiere di rette per S ; verificare che 2 rette della stessa schiera sono sghembe. Studiare l'intersezione di rette appartenenti a schiere diverse. Sia h la generica retta del fascio di rette per l'origine in \mathbb{R}^2 . Posto $C = \phi(h)$ determinare fra queste curve quelle che sono rette. Sia r una fra queste rette; parametrizzare S come superficie rigata avente direttrice r ².

¹descrivere cioè S come $f^{-1}(a)$ con a valore regolare di una funzione C^∞ in \mathbb{R}^3 .

²Data una curva C parametrizzata da $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ed una funzione a valori vettori $\underline{w} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ otteniamo una superficie rigata S considerando $\phi(u, v) = \sigma(u) + v\underline{w}(u)$; S è la superficie di direttrice C e generatrici $r_u := \sigma(u) + v\underline{w}(u)$.