Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Esonero del 20/10/06

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\}$.

- Spiegare perché W è un sottospazio vettoriale di V.
- Determinare la dimensione di W.
- Determinare una base di W.
- Determinare [1] un sottospazio U di V tale che $U \oplus W = V$.

Soluzione. W è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *omogeneo* di 1 equazione in 3 incognite; è quindi un sottospazio. W non è uguale al solo vettore nullo, dato che ad esempio $(1, 0, -1) \in W$ (per ragioni tipografiche scriveremo spesso le triple o le n-ple come righe e non come colonne). Quindi $\dim W > 0$. D'altra parte $\dim W < 3$, dato che $W \neq \mathbb{R}^3$ (ad esempio $(1, 0, 1) \notin W$). La dimensione di W è quindi uguale ad 1 oppure a 2. Se fosse uguale ad 1 allora $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$ con $\underline{w}$ un vettore non-nullo di W, ad esempio $\underline{w} = (1, 0, -1)$; dato che $(0, 1, 0) \in W$ ma $(0, 1, 0) \notin \mathrm{Span}(1, 0, -1)$, ne segue che W ha dimensione 2. Una base di W è costituita da 2 vettori linearmente indipendenti o, equivalentemente, da 2 vettori non-proporzionali. Ad esempio $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base di W. Passiamo all'ultimo quesito: occorre determinare un sottospazio U tale che $U+W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Dalla formula di Grassmann segue che U deve avere dimensione 1, quindi $U = \mathrm{Span}(\underline{u})$ per qualche vettore non-nullo $\underline{u}$; detto diversamente, U è la retta vettoriale generata da $\underline{u}$. Deve essere $\underline{u} \notin W$, altrimenti, essendo W un sottospazio, $\mathrm{Span}(\underline{u}) \subset W$ e quindi $U \cap W = U$ contro l'ipotesi; occorre quindi prendere $\underline{u} \notin W$, ad esempio $\underline{u} = (1, 0, 1)$. Se poniamo $U = \mathrm{Span}(1, 0, 1)$ allora abbiamo finito: infatti $U + W = \mathbb{R}^3$ dato che i tre vettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{u}\}$ con

$$\underline{w}_1 = (1, 0, -1)\,, \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \underline{u} = (1, 0, 1)\,,$$

sono linearmente indipendenti; inoltre $W \cap U = \{\underline{0}\}$, dato che la retta vettoriale generata da U ha solo il vettore nullo a comune con W.

Esercizio 2. Determinare tutti i numeri complessi w tali che $w^3 = -i$.

Soluzione. L'esercizio chiede di determinare le radici terze del numero complesso $-i$. Dato che $-i = \cos(\frac{3}{2}\pi) + i \sin(\frac{3}{2}\pi)$ otteniamo subito le radici terze z_0, z_1, z_2 utilizzando la formula 4.17 del libro

$$z_0 = \cos\Big(\frac{\frac{3}{2}\pi}{3}\Big) + i \sin\Big(\frac{\frac{3}{2}\pi}{3}\Big) = i$$

$$z_1 = \cos\Big(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\Big) + i \sin\Big(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_2 = \cos\Big(\frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}\Big) + i \sin\Big(\frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

Esercizio 3. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ è reale il numero

$$\frac{x - 2 + ix}{x - 3 + i5}$$

[1] determinare vuol dire in questo caso: *descrivere U tramite una sua base*

Soluzione. Si ha:

$$\frac{x-2+ix}{x-3+i5} = \frac{(x-2+ix)(x-3-i5)}{x^2-6x+34} = \frac{(x^2-10x+6)+i(x^2+2x-10)}{x^2-6x+34}$$

Dobbiamo quindi imporre che $(x^2+2x-10)=0$; otteniamo $x=-1\pm\sqrt{11}$

Esercizio 4. Utilizzando la formula di de Moivre calcolare $(1-i\sqrt{3})^{-10}$

Soluzione. È subito visto che

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$$

Quindi

$$(1-i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-10}\left(\cos(\frac{10\pi}{3}) + i\sin(\frac{10\pi}{3})\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Esercizio 5. Determinare le radici quadrate di $(1+i)(1-i)^{-1}$.

Soluzione. Si ha

$$(1+i)(1-i)^{-1} = i.$$

Quindi bisogna semplicemente trovare le radici quadrate di i; ma $i=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$ e quindi le due radici quadrate sono

$$z_0 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = \cos(5\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 6. Sia $V=M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia

$$W = \{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ tali che } ad-bc=0\}$$

Stabilire se il sottoinsieme W è un sottospazio vettoriale di V.

Soluzione. W non è un sottospazio. Infatti

$$\underline{w}_1 := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \in W, \quad \underline{w}_2 := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \in W, \text{ ma } \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \notin W\,.$$

Esercizio 7. Sia $V=\mathbb{R}^5$. Stabilire se il sottoinsieme

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ tali che } x_1x_3x_5 = 0\}$$

è un sottospazio.

Soluzione. W non è un sottospazio. Infatti

$\underline{w}_1 := (1,1,1,1,0) \in W\,,\quad \underline{w}_2 := (0,0,0,0,1) \in W \quad \text{ma} \quad \underline{w}_1+\underline{w}_2 = (1,1,1,1,1) \notin W\,.$

Esercizio 8. Sia $V=\mathbb{R}_5[t]$. Consideriamo $q(t)=2t+5t^2+\pi t^3+t^4+\sqrt{2}t^5$ ed il sottospazio $\mathrm{Span}(q)$. Stabilire se $p(t)=\pi t^3+t^4+\sqrt{2}t^5$ appartiene a $\mathrm{Span}(q)$.

Soluzione. Per definizione $\mathrm{Span}(q)=\{\lambda(2t+5t^2+\pi t^3+t^4+\sqrt{2}t^5)\,,\lambda\in\mathbb{R}\}$. Quindi un polinomio $r(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5$ appartiene a $\mathrm{Span}(q)$ se e solo se esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2\lambda, \quad a_2 = \lambda 5 \quad a_3 = \lambda\pi, \quad a_4 = \lambda, \quad a_5 = \lambda\sqrt{2}.$$

È facilissimo vedere che tale λ non esiste per $p(t)=\pi t^3+t^4+\sqrt{2}t^5$; quindi $p(t)=\pi t^3+t^4+\sqrt{2}t^5 \notin \mathrm{Span}(q)$.

Esercizio 9. Studiare al variare del parametro t la compatibilità del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + tx_2 + tx_3 + tx_4 = t \\ tx_1 + 2(t-1)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = t^2 - 2 \\ x_1 + x_2 + (t-1)x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Sia $A := \{t \in \mathbb{R} \,|\, \text{il sistema ammette un'unica soluzione}\}$. Determinare esplicitamente la soluzione del sistema quando $t \in A$.

Soluzione. Occorre ridurre in forma triangolare la matrice completa del sistema utilizzando il metodo di Gauss. Consideriamo quindi

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & t & t & t \\ t & 2(t-1) & 2 & 2 & t^2-2 \\ 1 & 1 & t-1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Dopo il primo passo otteniamo

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & t-2 & t-2 & t-2 \\ 0 & t-2 & 2-t & t-2 & t^2-t-2 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & 0 \end{array}\right| \tag{1}$$

Se $t = 2$ il sistema è allora equivalente alla singola equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

che ha infinite soluzioni, ottenute risolvendo ad esempio rispetto a x_1 e ponendo $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$, con s, t, u parametri in $\mathbb{R}$. Se $t \neq 2$ allora possiamo moltiplicare la seconda, terza e quarta riga di (1) per $1/(t-2)$. Vi ricordo che questa operazione produce un sistema equivalente a quello dato. Otteniamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Riducendo ulteriormente otteniamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t/2 \end{array}\right|$$

Ne deduciamo che per ogni $t \neq 2$ la matrice dei coefficienti è non singolare ed esiste quindi unica la soluzione. Fissato $t \neq 2$ otteniamo la soluzione $x_1 = 0, x_2 = (t+2)/t, x_3 = 0, x_4 = -t/2$.

Esercizio 10. Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ le quadruple

$$\left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ t \\ 1 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2(t-1) \\ 1 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2 \\ (t-1) \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2 \\ 1 \end{array}\right|$$

- sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$

- costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$

Determinare inoltre la dimensione del loro Span al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(Suggerimento: confrontare questi vettori con le colonne della matrice dell'esercizio precedente.)

Soluzione. Dobbiamo stabilire se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 \left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ t \\ 1 \end{array}\right| + \alpha_2 \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2(t-1) \\ 1 \end{array}\right| + \alpha_3 \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2 \\ (t-1) \end{array}\right| + \alpha_4 \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2 \\ 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right| .$$

Dobbiamo quindi studiare le soluzioni del sistema omogeneo, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, α_4, ottenuto dall'equazione precedente applicando la definizione di somma e prodotto per uno scalare in $\mathbb{R}^4$. Tale sistema è il sistema omogeneo associato al sistema non omogeneo considerato nell'esercizio precedente. La sua matrice dei coefficienti è quindi non-singolare per $t \neq 2$; quindi, per $t \neq 2$ il sistema omogeneo ammette un'unica soluzione, necessariamente la soluzione nulla. Ne segue che per $t \neq 2$ i quattro vettori sono linearmente indipendenti e costituiscono quindi una base di $\mathbb{R}^4$ (infatti, in uno spazio vettoriale di dimensione n, n vettori linearmente indipendenti costituiscono sempre una base). La dimensione del loro Span è ovviamente 4. Rimane da analizzare il caso $t = 2$. Sostituendo questo valore nella definizione dei 4 vettori, capiamo che per $t = 2$ i vettori sono tutti proporzionali: quindi la dimensione del loro Span è in questo caso uguale ad 1.