Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 19/10/06

Esercizio 1. Sia $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi e come campo degli scalari i numeri reali. Verificare che la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ è uguale a due. (Suggerimento: considerare i vettori 1 e i...).

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Vero o Falso :

- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri reali $\mathbb{R}$ e come campo di scalari i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Le operazioni sono indotte dalle usuali operazioni sui reali. Dimostrare che $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$. (Suggerimento: dimostrare che i vettori $\underline{v}_1 = 1$ e $\underline{v}_2 = \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti...).

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0)\,,\ \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0)\,,\ \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Si può verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$

Soluzioni

Soluzione es. 1. Sappiamo che ogni numero complesso si può scrivere come $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Vale a dire $\{1, i\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Inoltre 1 ed i sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ in quanto $x+iy = 0$ se e solo se $x = y = 0$. Dunque $\{1, i\}$ è un sistema di generatori indipendenti, ovvero una base. Avendo una base formata da due vettori, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ ha dimensione due.

Soluzione es. 2. Si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^3$. per mostrare che sono una base basta mostrare che sono linearmente indipendenti. L'equazione

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$$

è equivalemte al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Applichiamo l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \end{array}\right|$$

Tutti i pivot sono diversi da zero. la matrice del sistema è pertanto non singolare, ed il sistema ammette un unica soluzione. Trattandosi di un sistema omogeneo, quest'unica soluzione deve essere la soluzione banale.

Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \underline{v}_3$ significa determinare i tre numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali risulta

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{e}_2$$

Arriviamo così al sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che anche in questo caso avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ed $\underline{e}_2$. Applicando l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema troviamo:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -7/5 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

Le coordinate di $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \underline{v}_3$ sono pertanto $(-1/3, -2/3, -7/3)$; vale a dire

$$\underline{e}_2 = -\frac{1}{3}\underline{v}_1 - \frac{2}{3}\underline{v}_2 - \frac{7}{3}\underline{v}_3$$

Soluzione es. 3. La prima affermazione è falsa. Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che in $\mathbb{R}^6$ è possibile trovare quattro vettori linearmente indipendenti. Un modo è il seguente: sappiamo che $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 6. Una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6\}$ è costituita da 6 vettori linearmente indipendenti tra loro. Ma allora, in particolare i 4 vettori $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ sono linearmente indipendenti.

La seconda affermazione è vera. Se avessimo in $\mathbb{R}^4$ sei vettori linearmente indipendenti, allora la dimensione di $\mathbb{R}^4$ sarebbe almeno 6, ma sappiamo che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è uguale a 4.

Infine, l'ultima affermazione è falsa. Per fornire un controesempio basta prendere tre vettori a piacere in $\mathbb{R}^6$ e scegliere come quarto vettore una combinazione lineare dei primi tre. E' bene osservare che per produrre questo controesempio abbiamo dovuto scegliere il quarto vettore in modo particolare: in effetti quattro vettori "generici" di $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti. Su cosa debba intendersi precisamente con "generici" torneremo più avanti nel corso. Per ora ci accontentiamo di dire (senza specificarne meglio il significato) che quattro vettori linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^6$ costituiscono una situazione "speciale".

Soluzione es. 4. Seguiamo il suggerimento e dimostriamo che i due numeri reali 1 e $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, ovvero che l'equazione $x \cdot 1 + y \cdot \sqrt{2} = 0$ con $x, y \in \mathbb{Q}$ ha solamente la soluzione banale $(x, y) = (0, 0)$. Analizziamo separatamente le due possibilità $y = 0$ e $y \neq 0$. Se $y = 0$, l'equazione $x + y\sqrt{2} = 0$ si riduce a $x = 0$ ovvero la soluzione è $(x, y) = (0, 0)$. Se invece $y \neq 0$, da $x + y\sqrt{2} = 0$ ricaviamo $\sqrt{2} = -x/y \in \mathbb{Q}$, ovvero che $\sqrt{2}$ è un numero razionale. Ma questo è assurdo e rimaniamo con la solita possibilità $y = 0$ e dunque con la sola soluzione $(x, y) = (0, 0)$. Abbiamo così provato che in $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ ci sono almeno due vettori linearmente indipendenti, il che implica $\dim \mathbb{R}_\mathbb{Q} \geq 2$. Si può poi dimostrare (ma non abbiamo gli strumenti per farlo) che in $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ ci sono infiniti vettori linearmente indipendenti: $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ è un esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita.

Soluzione es. 5. Introduciamo un'utile notazione: se un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V, scriviamo $W \leq V$.
Verifichiamo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti: l'equazione $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$ scritta per esteso è

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

ed ha evidentemente la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$. Determiniamo ora una base per i sottospazi W_1, W_2 e W_3. Osserviamo che tutti i generatori di W_1 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, dunque $W_1 \leq \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. D'altronde i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ appartengono a W_1 e dunque $\operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \leq W_1$. Ne segue $W_1 = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. Poiché i tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, essi sono una base per il sotttospazio che generano, e dunque una base di W_1 è $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Con ragionamento perfettamente analogo si prova che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W_2. Infine, per quanto riguarda W_3 osserviamo che tutti i generatori di W_3 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e dunque $W_3 \leq \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. I due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali: quindi sono una base per $\operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ che pertanto ha dimensione 2. Questo ci dice che $\dim W_3 \leq 2$; pertanto in W_3 possiamo trovare al più 2 vettori linearmente indipendenti e, inoltre, se troviamo 2 vettori indipendenti in W_3 questi sono una base. Si verifica facilmente che $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ e $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, per cui $\{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2\}$ è una base di W_3. Osserviamo che W_3 viene ad essere un sottospazio bidimensionale di $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, che ha dimensione 2. Ne segue $W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Questo fatto può essere dimostrato direttamente, mostrando che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W_3$. Infatti si ha

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$
$$\underline{v}_2 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) - \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$