Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 16/10/06

Esercizio 1. Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ la funzione differenziabile

$$f(x, y) = x \log y - 1\,.$$

- Verificare che il luogo degli zeri di f è unione di due 1-sottovarietà [1];
- determinare una parametrizzazione regolare di ognuna di esse e disegnarle.

Esercizio 2. Sia $F(x, y, x) := (\log xy, \log xz)$.

- determinare il più grande aperto $U \subset \mathbb{R}^3$ sul quale F è differenziabile;
- verificare che $f^{-1}(0)$ è unione di due 1-sottovarietà; determinare parametrizzazioni di queste 1-sottovarietà e verificare che sono piane.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) := xyz$.

- Determinare i punti critici di f.
- Verificare che $f^{-1}(1)$ ha quattro componenti connesse, ognuna delle quali è una superfiecie regolare. Di ciascuna componente connessa scrivere una parametrizzazione e indicare le linee coordinate.

Esercizio 4. Sia $\phi(t, s) := (ts^2, t^2 s, ts)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Consideriamo $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{R}^3$, l'immagine di ϕ in $\mathbb{R}^3$.

- Verificare che $S := \operatorname{Im}\phi \setminus \underline{0}$ è una superficie regolare (suggerimento: esprimere S come grafico di una funzione $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ per un opportuno aperto $U \subset \mathbb{R}^2$).
- Sia $\Sigma := f^{-1}(0) \setminus \underline{0}$, con $f(x, y, z) := xy - z^3$; verificare che Σ è una superficie regolare e che S è un sottoinsieme proprio di Σ.

[1] Vi ricordo che per definizione le 1-sottovarietà sono connesse.