Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Soluzioni compito a casa del 13/10/06

Soluzione esercizio 1. La matrice combinazione lineare richiesta è

$$A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 2. Dobbiamo stabilire se l'equazione $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0}$, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ammetta o meno soluzioni non banali [1]. La combinazione lineare $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ esplicitamente è

$$\alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{vmatrix}$$

pertanto l'equazione $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0}$ diventa

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ovvero è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

E' immediato osservare che questo sistema ammette la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$.

In definitiva abbiamo verificato che

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

e quindi le tre matrici A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.

Soluzione esercizio 3. Il sottoinsieme W_1 non è un sottospazio di V. Ad esempio,[2] il vettore $(1, 1, 2)$ appartiene a W_1, ma il suo opposto, ovvero il vettore $(-1, -1, -2)$ non appartiene a W_1.

Il sottoinsieme W_2 non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore $(1, 2, 2)$ appartiene a W_2, ma il suo doppio $2 \cdot (1, 2, 2) = (2, 4, 4)$ non appartiene a W_2.

Il sottoinsieme W_3 non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore nullo $(0, 0, 0)$ non appartiene a W_3.

---

[1] ragionare sulla definizione stessa di dipendenza lineare; notare che a destra c'è la matrice nulla

[2] Se un sottoinsieme $W \subseteq V$ non è un sottospazio, ci sono in generale molti modi di dimostrarlo. Quelli proposti qui sono solamente degli esempi: ce ne sono molti altri altrettanto validi.

Il sottoinsieme W_4 è l'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo. Come tale non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore nullo $(0,0,0)$ non appartiene a W_4.

Il sottoinsieme W_5 è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo. Come tale è un sottospazio di V.

Soluzione esercizio 4. Le operazioni $\{+,\cdot\}$ definite nel testo dell'esercizio non dotano $\mathbb{R}^2$ di una struttura di spazio vettoriale. Forse il modo più semplice di vederlo (ce ne sono ovviamente altri) è osservare che $1 \cdot (x,y) = (x,-y)$ e dunque, in generale

$$1 \cdot (x,y) \neq (x,y)$$

Non è dunque verificato l'assioma $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$, $\forall \underline{v} \in V$.