

Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 12/10/06 con Soluzione

Esercizio. Utilizzando il metodo di Gauss, studiare al variare di t ed s in \mathbb{R} le soluzioni di

$$\begin{cases} 3x + sy + z = 1 \\ x - y + sz = -2 \\ 4x - 3y - z = t \end{cases} .$$

Soluzione. La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & s & 1 & 1 \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 4 & -3 & -1 & t \end{array} \right)$$

Per ritardare il più possibile l'apparizione del parametro s sui pivot, scambiamo la prima e la terza riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -1 & t \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array} \right)$$

A questo punto procediamo con l'usuale eliminazione gaussiana:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -1 & t \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array} \right) \\ \mapsto & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & -1/4 & s+1/4 & -2-t/4 \\ 0 & s+9/4 & 7/4 & 1-3t/4 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 4s+9 & 7 & 4-3t \end{array} \right) \\ \mapsto & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 0 & 7+(4s+9)(4s+1) & 4-3t-(8+t)(4s+9) \end{array} \right) \\ \mapsto & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 0 & 2s^2+5s+2 & -\frac{1}{4}(st+3t+8s+17) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Notiamo che l'ultimo pivot dipende da s . Il sistema avrà un comportamento diverso a seconda se quest'ultimo pivot sia diverso o uguale a zero. Risolvendo l'equazione

$$2s^2 + 5s + 2 = 0$$

troviamo

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\}$$

Dunque, per $s \neq -2, 1/2$ tutti i pivot sono diversi da zero e il sistema ha un'unica soluzione per ogni valore di t . Restano da esaminare i due casi speciali $s = -2$ ed $s = -1/2$. Per $s = -2$ la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & 7 & 8+t \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(t+1) \end{array} \right)$$

Ne segue che per $t \neq -1$ il sistema è incompatibile, non ammette cioè alcuna soluzione. Per $t = -1$ la matrice del sistema diventa invece

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

L'ultima riga corrisponde all'identità $0 = 0$. Quest'identità è verificata per ogni valore di x, y, z quindi l'ultima equazione del sistema non porta con sé alcuna informazione.

Se poniamo $z = \lambda$ e trattiamo le variabili z come parametri, portandole dall'altra parte dell'uguale, la matrice del sistema si riscrive come

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/4 & -1/4 + \lambda/4 \\ 0 & 1 & 7 - 7\lambda \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 - 5\lambda \\ 0 & 1 & 7 - 7\lambda \end{array} \right)$$

ovvero

$$\begin{cases} x = 5 - 5\lambda \\ y = 7 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Il caso $s = -1/2$ si analizza in modo del tutto simile: la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & 1 & 8 + t \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(5t + 26) \end{array} \right)$$

Pertanto, per $t \neq -26/5$ il sistema è incompatibile, mentre per $t = -26/5$ la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & -13/10 \\ 0 & 1 & 1 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Riassumendo la nostra analisi:

Parametri	Soluzioni
$s \neq -2, -1/2$	un'unica soluzione, per ogni t fissato
$s = -2, t \neq -1$	nessuna soluzione
$s = -2, t = -1$	infinite soluzioni, dipendenti da un parametro
$s = -1/2, t \neq -26/5$	nessuna soluzione
$s = -1/2, t = -26/5$	infinite soluzioni, dipendenti da un parametro