**Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.**
**Prof. P. Piazza**
**Compito a casa del 7/10/06**

**Esercizio 1.** Dimostrare che la curvatura di una curva regolare è un invariante per isometrie[1]. Dimostrare che la torsione di una curva biregolare è un invariante per movimenti rigidi [2].

**Esercizio 2.** Sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'elica circolare

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)\,.$$

- determinare il piano osculatore in $\sigma(0)$, $\pi_0$.
- sia $\widetilde{\sigma}$ la curva piana ottenuta proiettando $\sigma$ ortogonalmente su $\pi_0$. Verificare che le curvature di $\sigma$ e $\widetilde{\sigma}$ coincidono in $\sigma(0)$.
- verificare in generale che se $\sigma$ è una curva parametrizzata, $\sigma(t_0) = P_0$, e $k(t_0) \neq 0$, allora la curva $\widetilde{\sigma}$ uguale alla proiezione ortogonale di $\sigma$ sul piano osculatore $\pi_0$ in $P_0$ ha in $P_0$ curvatura $\widetilde{k}$ uguale a $k(t_0)$ (suggerimento: si scelga un riferimento opportuno, utilizzando quindi l'esercizio 1).

**Esercizio 3.** Sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata $\mathbb{R} \ni t \to (t, \cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^3$.

- Calcolare $\kappa$, $\tau$ ed i tre versori di Frenet; determinare i punti di curvatura massima;
- calcolare il piano osculatore in ogni punto e verificare che forma un angolo costante con l'asse $z$;
- parametrizzare $\sigma$ secondo la lunghezza d'arco; determinare gli estremi dei due archi di $\sigma$ aventi lunghezza 2 e punto iniziale $(0, 1, 0)$.

[1] $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un'isometria se $T\underline{x} = A\underline{x} + \underline{c}$, $A \in O(3)$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$
[2] un'isometria èun movimento rigido se $A \in SO(3)$