Corso di Laurea in Fisica. Geometria 1. a.a. 2006-07.
Gruppo B. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 10/10/06

Esercizio 0. Fissate sul piano $\mathcal{A}^2$ individuato dal vostro foglio un riferimento affine $RA(O\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j})$ con $\overrightarrow{i}$ di lughezza α (α scelto a vostro piacimento); $\overrightarrow{j}$ di lunghezza 2α; $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ formanti un angolo di $\pi/3$ approssimativamente. In questo riferimento disegnate: il punto P di $\mathcal{A}^2$ di coordinate $(1,0)$; il punto di coordinate $(3,-1)$; il vettore $\overrightarrow{v}$ di $\mathcal{V}_O^2$ di coordinate $(3,-1)$, il punto Q di coordinate $(2,2)$, il vettore $\overrightarrow{w}$ di coordinate $(-2,-1)$, la retta r passante per P e di vettore direttore $\overrightarrow{v}$, la retta s passante per Q e di vettore direttore $\overrightarrow{w}$.
Procedendo come a lezione determinate le coordinate del punto d'intersezione di r ed s [1].

Esercizio 1. Utilizzando il metodo di Gauss, discutere il seguente sistema lineare quadrato:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+y+4z=2 \\ 3x-3y+z=1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Abbiamo dimostrato in classe che ogni sistema lineare quadrato è equivalente ad un sistema triangolare superiore.
Dare la definizione di sistema lineare triangolare *inferiore*. Dimostrare che ogni sistema quadrato è equivalente ad un sistema triangolare inferiore. [2]

Esercizio 3. Sia $A\underline{x}=\underline{b}$ un sistema lineare quadrato, con A matrice $n\times n$. Supponiamo che A sia *non singolare*. Verificare che il sistema $A\,\underline{x}=\underline{b}$ è equivalente ad un sistema diagonale $\mathrm{Id}_n\,\underline{x}=\underline{c}$ con Id_n la matrice identità:

$$\mathrm{Id}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

e dunque al sistema banale $\underline{x}=\underline{c}$. *Suggerimento:* fare uso dell'esercizio 2.

Esercizio 4. Applicare il procedimento messo a punto nell'esercizio 3 al sistema dell'esercizio 1; risolvere nuovamente tale sistema.

Esercizio 5. Utilizzando il metodo di Gauss, studiare il sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} y-z=-1 \\ x+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

[1] Un sistema 2×2 può essere risolto facilmente per sostituzione: ricavate un'incognita in funzione dell'altra usando un'equazione; sostituite nella seconda equazione l'espressione trovata ottenendo un'equazione lineare in una sola incognita; la risolvete e risostituite nella prima equazione.

[2] *Suggerimento:* utilizzare una riduzione di Gauss "a salire", partendo dall'ultima colonna.