Corso di dottorato a.a. 05-06

Operatori ellittici e topologia

Terzo compito

Denotiamo con $\mathrm{Cl}(k)$ l'algebra di Clifford associata allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ dotato del prodotto scalare canonico. $\mathrm{Cl}(k) = \mathrm{Cl}^0(k) \oplus \mathrm{Cl}^1(k)$, con $\mathrm{Cl}^0(k)$ $(\mathrm{Cl}^1(k))$ la sottoalgebra generata dagli elementi che sono il prodotto di un numero pari (dispari) di elementi di $\mathbb{R}^k$. $\mathbb{C}\mathrm{l}(k)$ è la complessificazione di $\mathrm{Cl}(k)$. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^k$ è denotata con $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k\}$.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{H}$ l'algebra dei quaternioni. Verificare che si hanno i seguenti isomorfismi di algebre:

$$\mathrm{Cl}(1) \simeq \mathbb{C}\,, \quad \mathrm{Cl}(2) \simeq \mathbb{H}\,, \quad \mathrm{Cl}^0(2) \simeq \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

Esercizio 2. Verificare che $\mathrm{Cl}(3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Suggerimento: poniamo

$$x = \underline{e}_1,\ y = \underline{e}_2,\ z = \underline{e}_3$$

Verificare che l'unione delle seguenti 2 quadruple fornisce una base di $\mathrm{Cl}(3)$:

$$\frac{1+xyz}{2}\,, \quad \frac{xy-z}{2}\,, \quad \frac{yz-x}{2}\,, \quad \frac{zx-y}{2}\,;$$
$$\frac{1-xyz}{2}\,, \quad \frac{xy+z}{2}\,, \quad \frac{yz+x}{2}\,, \quad \frac{zx+y}{2}\,.$$

Utilizzare questa base per definire l'isomorfismo. Verificare che $\mathrm{Cl}^0(3)$ corrisponde ad una copia diagonale di $\mathbb{H}$ in $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Dimostrare che $\mathrm{Cl}^0(4) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Esercizio 3. Determinare $\mathrm{Pin}(1) \subset \mathrm{Cl}(1) \simeq \mathbb{C}$. Determinare $\mathrm{Spin}(1)$. Dimostrare che $\mathrm{Spin}(2) = \{\cos\theta + (\sin\theta)\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2\}$ e che quindi $\mathrm{Spin}(2) \simeq S^1 = SO(2)$. Verificare che con questa identificazione il rivestimento $\rho : \mathrm{Spin}(1) \to SO(2)$ descritto a lezione è dato da $\theta \to 2\theta$. Avrete bisogno di un pò di trigonometria.

Esercizio 4. Verificare che $\mathrm{Spin}(3)$ è isomorfo alla sfera unitaria S^3 in $\mathbb{H}$. Suggerimento: utilizzare l'identificazione $\mathrm{Cl}(3) \leftrightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.
Verificare che c'è un isomorfismo di algebre

$$\mathbb{H} \simeq V := \{Q = \begin{pmatrix} t+iz & -x+iy \\ x+iy & t-iz \end{pmatrix}, (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Dedurne che $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$.

Esercizio 5. Sia V come nell'esercizio precedente, $V \simeq \mathbb{R}^4$. Possiamo introdurre una struttura naturale di spazio vettoriale euclideo su V e riguardarlo come $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare canonico. Denotiamo con S^+, S^- due copie di $\mathbb{C}^2$ con il prodotto hermitiano standard. Sia $Q \in V$ e consideriamo l'applicazione

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\overline{Q}^t \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(S^+ \oplus S^-) \tag{1}$$

implicitamente a destra stiamo considerando $Q \in \mathrm{Hom}(S^+, S^-)$. Verificare che quest'applicazione induce un isomorfismo di algebre

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(4) \longleftrightarrow \mathrm{End}(S^+ \oplus S^-)$$

Dimostrare anche che $\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$.
Un metodo alternativo per dimostrare che $\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ è ovviamente quello di far vedere che $SU(2) \times SU(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(4)$.

Esercizio 6. Abbiamo visto in classe che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{2}$$

come applicazione del teorema di Gauss-Bonnet in dimensione 2. Verificare (2) direttamente, considerando la metrica hermitiana h definita dalla formula $h(z) = 1/((1+|z|^2))^2$ nella carta $U = \{[z_0, z_1] \mid z_0 \neq 0\}$ con coordinata $z = z_1/z_0$. Dedurne che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} e(T\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{3}$$

Esercizio 7. Siano E,F due fibrati vettoriali su M. Sia

$$P \ : \ C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$$

un operatore differenziale di ordine k: $P \in \mathrm{Diff}^k(M; E, F)$. Abbiamo dato in classe la definizione di simbolo principale

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(\pi^* E, \pi^* F)) .$$

Se $\xi \in T^*_x M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M, E)$ tali che $df|_x = \xi$ e $e(x) = e_x$ e definiamo $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\xi) \in Hom(E_x, F_x)$ come segue :

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(x, \xi)(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f - f(x))^k e)(x)$$

Verificare che $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\xi)$ non dipende dalle scelte fatte e che è una applicazione lineare da E_x in F_x.
Verificare che se M è uguale ad un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e se E ed F sono i fibrati prodotto su U allora questa nozione si riduce alla usuale nozione

di simbolo principale per una matrice (P_{ij}) di operatori differenziali: se

$$(P_{ij}) = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(ij) \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \right)$$

allora

$$\sigma_{\mathrm{pr}}((P_{ij}))(x, \xi) = \left(\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(ij)(\xi^1)^{\alpha_1} \ldots (\xi^n)^{\alpha_n} \right).$$

Esercizio 8. Sia (M, h) una varietà complessa con metrica hermitiana h. Verificare che il simbolo principale di $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ è dato da

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)(\xi_x) = \epsilon(\xi_x^{0,1}) - i(\xi_x^{1,0})$$

Esercizio 9. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Sia $\Lambda^* M := \Lambda^*(T^*M)$ con la sua naturale struttura di fibrato di moduli di Clifford (quindi $c(\xi) := \epsilon(\xi) - i(\xi)$).
Spiegare come ∇ induce una connessione $\nabla^{\Lambda^* M}$ sul fibrato $\Lambda^* M$. Dimostrare che questa connessione è di Clifford.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale e q una forma bilineare simmetrica. Sia $\mathrm{Cl}(V, q)$ l'algebra di Clifford associata. Abbiamo visto in classe che $\mathrm{Cl}(V, q)$ è un'algebra filtrata.
Dimostrare che l'applicazione naturale $V \to \mathcal{C}l(V, q)$ è iniettiva.
Dimostrare che esiste un isomorfismo fra l'algebra graduata associata a $\mathrm{Cl}(V, q)$, e cioè

$$\oplus_k (\mathrm{Cl}^k(V, q)/\mathrm{Cl}^{k-1}(V, q))$$

e l'algebra esterna $\Lambda^* V$