Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Prova scritta del 02/02/06

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Sia

$$< , >: V \times V \to \mathbb{R}$$

il prodotto scalare definito da

$$< p, q >:= \int_{-1}^{1} pq dx \,.$$

1.1. Verificare che $< , >$ definisce effettivamente un prodotto scalare definito positivo.
1.2. Consideriamo il sottospazio $W := (\mathbb{R}(1 + X))^{\perp}$. Determinare una base ortogonale di W.
1.3 Determinare la matrice associata all'operatore di proiezione ortogonale sul sottospazio $\mathbb{R}(1 + X)$ nella base standard di V

Esercizio 2. Piano affine $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ con coordinate x, y rispetto ad un fissato sistema di riferimento affine.
2.1 Determinare l' affinità

$$f : \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$$

tale che

$$f(1, 1) = (0, 0), \quad f(-2, -2) = (1, -1), \quad f(1, -2) = (1/4, 1/2)$$

2.2 Determinare l' affinità

$$f : \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$$

tale che

$$f(r) = (r'), \quad f(s) = s', \quad f(t) = (t')$$

dove

$$r : x = 1; \quad s : x = y; \quad t : y = -2$$
$$r' : 2x - y = 0; \quad s' : x = -y; \quad t' : 2x + y = 1$$

Esercizio 3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 sia assegnata la proiettività

$$F[x_0, x_1, x_2] = [2x_0 + x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, 2x_2]$$

3.1 Determinare i punti fissi di F (Definizione: $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un punto fisso di F se $F[x_0, x_1, x_2] = [x_0, x_1, x_2]$.)
3.2 Spiegare perché ogni proiettività G di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha almeno un punto fisso.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

e l'operatore $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Studiare la diagonalizzabilità di L_A. Determinare una matrice invertibile C *ed* una matrice triangolare T tali che

$$C^{-1}AC = T \,.$$

Esercizio 5. Piano euclideo con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, \underline{i}, \underline{j})$ e coordinate associate (x, y).
5.1 Determinare la forma canonica metrica della conica

$$5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy + 8(\sqrt{3} - 1)x - 8(\sqrt{3} + 1)y + 20 = 0$$

verificando in particolare che trattasi di un'ellisse reale.
5.2 Determinare il cambiamento di coordinate che porta $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica.
5.3. Determinare, nel riferimento $RC(O, \underline{i}, \underline{j})$, l'equazione cartesiana della retta contenente il semiasse maggiore.
5.4. Disegnare la conica nel riferimento $RC(O, \underline{i}, \underline{j})$.