Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Prova in itinere del 17/01/06

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 e $< p(t), q(t) >$ il prodotto scalare definito da $p(0)q(0) + p(1)q(1) - p(-1)q(-1)$.
1.1 Verificare che il prodotto scalare è non degenere
1.2 Determinarne la segnatura.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ siano π il piano di equazione:

$$X_0 + X_1 - X_2 + 2X_3 = 0,$$

r la retta di equazioni cartesiane

$$2X_0 - X_1 - X_2 + X_3 = 0$$
$$X_0 + 2X_1 - X_2 - X_3 = 0$$

e s la retta di equazioni parametriche

$$X_0 = t + u,\ X_1 = 2t - u,\ X_2 = -t,\ X_3 = u.$$

2.1 Verificare che le due rette sono sghembe e che il piano π non contiene nessuna delle due rette.
2.2 Trovare equazioni parametriche della retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.
L'esercizio appena assegnato è un caso particolare del seguente enunciato:
Siano r e s due rette sghembe e π un piano che non contiene nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.
2.3 Trovare il duale del precedente enunciato.

Esercizio 3. Retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1. Siano dati i punti

$$p_1 = [0,1] \quad p_2 = [1,2] \quad p_3 = [2,3] \quad p_4 = [2,1]$$
$$q_1 = [-1,1] \quad q_2 = [0,1] \quad q_3 = [1,5] \quad q_4 = [1,1]$$

Verificare che esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che $f(p_i) = q_i$ per $i = 1, \ldots, 4$ e determinarla.

Esercizio 4. Piano euclideo $\mathcal{E}^2(\mathbb{R})$ con coordinate x, y rispetto ad un fissato sistema di riferimento cartesiano. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 + 4xy + y^2 + 2y + 1 = 0.$$

4.1. Verificare che $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
4.2. Determinare un' isometria f di $\mathcal{E}^2(\mathbb{R})$ in modo tale che $f(\mathcal{C})$ abbia forma canonica metrica.
4.3. Trovare il centro di simmetria, asintoti e fuochi di $\mathcal{C}$ nelle coordinate x, y.

Esercizio 5. Piano proiettivo reale numerico $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. È data la conica proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione

$$3X_0^2 - 10X_0X_2 + 2X_1^2 + 3X_2^2 = 0$$

5.1 Determinare la forma canonica proiettiva della conica $\mathcal{C}$.
5.2 Siano $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ le coniche affini ottenute per desomogeneizzazione rispetto a X_0, X_1, X_2 rispettivamente. Classificare dal punto di vista affine le tre coniche $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.