Corso di dottorato a.a. 05-06

Operatori ellittici e topologia

Primo compito

Esercizio 1. Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X). Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1} \,.$$

Verificare che (E, π_E, X) è isomorfo a (F, π_F, X) se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:
1) $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia $\widehat{E}$ l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\mathcal{R}(y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$. *Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale di rango k.*

Esercizio 3. Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale di rango k. Verificare che è ben definito il duale di E, E^*. Determinare le funzioni di transizione di E^* a partire da quelle di E.

Esercizio 4. Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali. Sia $\phi : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un omeomorfismo).

Esercizio 5.
5.1. Verificare che $\mathbb{C}P^n$ è una varietà complessa di dimensione (complessa) n.
Suggerimento: sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ la proiezione canonica e denotiamo $\pi(z_0, \dots, z_n) = [z_o, \dots, z_n]$. Consideriamo gli aperti

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \ \ z_i \neq 0\}$$

e le applicazioni $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, $\phi_i[z_0, \dots, z_n] = (z_0/z_i, \dots, \hat{i}, \dots, z_n/z_i)$. Definire a partire da $\{(U_i, \phi)\}$ una struttura di varietà complessa di dimensione (complessa) n.
5.2 Sia $L := E_{1,n+1}(\mathbb{C})$ il fibrato universale su $\mathbb{C}P^n$. Verificare che L è un fibrato complesso di rango 1 e olomorfo.
5.3 Consideriamo in particolare $\mathbb{C}P^1$. Descrivere le funzioni di transizione di L^k, $k \in \mathbb{N}$ (con L^k uguale al prodotto tensoriale di L con se stesso k volte). Descrivere le funzioni di transizione di $(L^*)^k$. Poniamo $L^{-k} = (L^*)^k$.
Vero o falso : $\ell \neq k \Rightarrow$ L^ℓ *e* L^k *non sono isomorfi.*
(Osserviamo che le funzioni di transizione del prodotto tensoriale sono il prodotto tensoriale delle funzioni di transizione. Qui parliamo di un fibrato di rango 1, quindi...).

Esercizio 6. Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo dotato $G_k(\mathbb{R}^n)$ di una topologia. Dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$.

Potete procedere in due modi:

1) richiamate quanto fatto in classe e dimostrate che le applicazioni ϕ_α che abbiamo definito sono effettivamente delle carte e danno alla grassmanniana una stuttura di varietà differenziabile reale;

2) procedete secondo i seguenti suggerimenti:

(2.1). Sia W un sottospazio di dimensione $n-k$ di $\mathbb{R}^n$ e sia

$$O_W = \{V \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid V \cap W = \underline{0}\}$$

Sia V_0 un elemento di O_W. Costruire delle applicazioni biettive

$$O_W \leftrightarrow \mathrm{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}.$$

[1]

[1] *Ulteriori suggerimenti per questo primo punto:*
(i) Dato $A \in \mathrm{Hom}(V_0, W)$ sia $V_A = \{\underline{v} + A\underline{v},\ \underline{v} \in V_0\}$, $V_A \subset \mathbb{R}^n$. Verificare che V_A ha dimensione k e che $V_A \cap W = \underline{0}$.
(ii) Verificare che $\mathbb{R}^n = V_0 \oplus W$. Siano $\pi : \mathbb{R}^n \to V_0$ e $\rho : \mathbb{R}^n \to W$ le rusultanti proiezioni. Verificare che se $V \in O_W$ allora $\pi|_V \in \mathrm{Iso}(V, V_0)$. Poniamo

$$A_V = \rho \circ (\pi|_V)^{-1}.$$

(2.2) Sia $\phi : O_W \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ l'applicazione biettiva appena costruita: verificare che gli O_W sono aperti e le ϕ omeomorfismi.
(2.3) Dimostrare che $\{(O_W, \phi)\}$ sono una collezione di carte locali per $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 7. Sia $E_{k,n}(\mathbb{R}) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_{k,n}(\mathbb{R}) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \to p$. Dimostrare che $(E_{k,n}(\mathbb{R}), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale di rango k e C^∞.

Esercizio 8. Ripetere gli esercizi 6 e 7 nel caso complesso, dimostrando quindi che $G_k(\mathbb{C}^n)$ è una varietà complessa. Dimostrare che il fibrato universale $E_{k,n}(\mathbb{C})$ è un fibrato *olomorfo*.

Esercizio 9. La mappa di Segre

$$\mu : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \longrightarrow \mathbb{R}P^{(n+1)(m+1)-1}$$

è definita come segue:

$$([z_0, \ldots, z_n], [w_0, \ldots, w_m]) \to [z_0 w_0, z_0 w_1, z_0 w_m, z_1 w_0, \ldots, \ldots, z_n w_m]\,.$$

Siano $\pi_1 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ e $\pi_2 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^m$ le due proiezioni.

9.1 Sia $n = m = 1$. Analizzando le funzioni di transizione dimostrare che

$$\mu^*(E_{1,(n+1)(m+1)}(\mathbb{R})) \simeq \pi_1^*(E_{1,n+1}(\mathbb{R})) \otimes \pi_2^*(E_{1,m+1}(\mathbb{R}))$$

9.2 (Facoltativo) Dimostrare questo isomorfismo in generale.

(iii) Utilizzare (i) e (ii) per determinare le due mappe

$$O_W \to \mathrm{Hom}(V_0, W)\,, \quad O_W \leftarrow \mathrm{Hom}(V_0, W)$$

una inversa dell'altra.
(iv) Fissando una base in V_0 ed una base in W costruire il secondo isomorfismo $\mathrm{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$.