Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Compito pomeridiano del 10/01/06

Esercizio 1. Piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Siano r_0, r_1, r_2 le rette

$$r_0 : x_0 + x_1 = 0 \qquad r_1 : x_0 + x_1 + x_2 = 0 \qquad r_2 : 2x_0 + x_1 = 0$$

e r'_0, r'_1, r'_2 le rette

$$r'_0 : x_0 - x_1 = 0 \qquad r'_1 : x_1 + x_2 = 0 \qquad r'_2 : x_2 = 0.$$

Determinare la proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f([1, 2, 3]]) = [4, 1, 5]$ e $f(r_i) = r'_i$ per $i = 0, 1, 2$.
Dire perchè esiste una unica proiettività come richiesto.

Esercizio 2. Spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 e spazio affine $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ con coordinate x, y, z. Si consideri la quadrica Q di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_0x_3 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = 0.$$

2.1. Determinare una proiettività $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ in modo tale che la quadrica $f(Q)$ abbia forma canonica proiettiva.
2.2. Deomogenizzare l'equazione di Q rispetto a x_0. Che tipo di quadrica di $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ si ottiene?

Esercizio 3. Formulare la duale di ognuna delle seguenti proposizioni.
3.1. Dati un punto e una retta di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che non contiene il punto, esiste un unico piano che contiene entrambi.
3.2. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ se due rette diverse si incontrano, generano un piano.
3.3. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tre punti diversi non allineati generano un piano.

Esercizio 4. Piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Consideriamo le due rette $r : x_0 + x_1 = 0$ e $r' : x_0 - x_2 = 0$. Siano λ, μ coordinate omogenee di r nel sistema di riferimento che ha i punti $[0, 0, 1]$ e $[1, -1, 0]$ come punti fondamentali e $[1, -1, 2]$ come punto unità. Siano λ', μ' coordinate omogenee di r' nel sistema di riferimento che ha i punti $[0, 1, 0]$ e $[1, 0, 1]$ come punti fondamentali e $[2, 3, 2]$ come punto unità. Fissiamo il punto $P_0 = [1, 0, 0]$, che è esterno sia ad r che a r', e consideriamo l'applicazione

$$\pi_{P_0} : r \to r'$$

che associa a $P \in r$ il punto $P' = L(P_0, P) \cap r'$. Scrivere l'espressione di π_{P_0} nelle coordinate $[\lambda, \mu]$ e $[\lambda', \mu']$ verificando in particolare che trattasi di un isomorfismo di rette proiettive.