Geometria Analitica. a.a. 05/06.

Osservazioni e complementi

Osservazione 1. (Sul concetto di geometria affine.) Nel corso di Algebra Lineare abbiamo incontrato (pg 19 Abate) la retta, il piano e lo spazio della "usuale geometria euclidea", denotati rispettivamente $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$. Abbiamo poi definito la geometria euclidea come lo studio delle proprietà delle figure che si ottengono da un gruppo di cinque assiomi. La geometria affine è stata invece definita come lo studio delle proprietà delle figure che si ottengono da un sistema di assiomi meno ricco, quello dove non vengono considerati gli assiomi che stabiliscono il confronto e l'uguaglianza fra segmenti appartenenti a rette non parallele e la misurazione, il confronto e l'uguaglianza di angoli (si veda il compito a casa del 17/12/2004). La retta, il piano e lo spazio insieme a questi assiomi ridotti erano stati definiti come retta, piano, e spazio *affini* e denotati ancora con $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$. La retta, il piano e lo spazio insieme agli assiomi completi erano stati definiti come retta, piano, e spazio *euclidei* e denotati con $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$

Quest'anno abbiamo assunto un punto di vista leggermente diverso, nel quale viene privilegiato il ruolo di opportuni sottogruppi del gruppo delle trasformazioni biettive di $\mathcal{A}_j$ in se stesso. Per noi la definizione di geometria affine nello spazio è ottenuta a questo punto [1] come segue:

- viene data la nozione di affinità dello spazio affine $\mathcal{A}_3$ (Abate [2] pp 232-234);
- viene definita una relazione di equivalenza fra le figure di $\mathcal{A}_3$ (ove una figura è per definizione un sottoinsieme): due figure $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono affinemente equivalenti se esiste un'affinità che muta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$;
- una proprietà di una figura $\mathcal{F}$ è affine se è comune a tutte le figure affinemente equivalenti a $\mathcal{F}$.
- la geometria affine è infine definita come lo studio delle proprietà affini delle figure.

Questa definizione è leggermente diversa da quella di Abate che utilizza invece i cambiamenti di riferimento. È chiaro che a norma delle Proposizioni 10C.2, 10C.4, 10C.5 in [A], una volta introdotto un sistema di riferimento, le due definizioni sono equivalenti, ma quella che diamo ha il pregio di non utilizzare la nozione di sistema di riferimento.

Osservazione 2. (Sul concetto di geometria euclidea.) La geometria euclidea è stata poi ridefinita in maniera analoga, utilizzando il gruppo delle isometrie al posto di quelle delle affinità. Il gruppo delle isometrie è definito in [A] p. 328-330.

Osservazione 3. Abbiamo dimostrato che se $A \in SO(3)$, $A \neq \mathrm{Id}$, allora L_A è una rotazione attorno ad un asse. La dimostrazione è reperibile in Abeasis *Complementi di Algebra Lineare e Geometria*, p 222. [3]

Se $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è la base di $\mathbb{R}^3$ ottenuta prendendo ordinatamente un versore dell'asse

[1] Non affronteremo qui il problema se e come le due definizioni di geometria affine sono compatibili. Per ulteriori approfondimenti vi rimando all'articolo: "Mettiamo ordine fra le geometrie: il programma di Erlangen e altri approcci" di C. Bernardi e M. Manghini, in *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol 26 (2003).

[2] Abate := [A]

[3] Abeasis := [Ab]

di rotazione e una base ortonormale del piano ad esso ortogonale, allora, a meno di cambiare l'orientazione della nuova base, L_A ha matrice associata in questa base data da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}$$

La dimostrazione mostra che A ha un autovalore reale uguale a 1 e due autovalori complessi non reali λ_2 e $\overline{\lambda_2}$, con $|\lambda_2| = 1$, e che ϕ è uguale all'argomento di λ_2.
Un risultato analogo vale per $A \in SO(n)$: esiste una base di $\mathbb{R}^n$ tale che L_A ha matrice associata in questa base data da una matrice diagonale a blocchi con blocchi di tipo 1×1 uguali ad 1 oppure a (-1) e blocchi di tipo 2×2 di tipo

$$\begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}.$$

I blocchi di tipo 2×2 corrispondono agli autovalori complessi non-reali di A; i blocchi 1×1 corrispondono agli autovalori reali.

Osservazione 4. I libri di Abate e Sernesi [4] adottano una notazione leggermente diversa:

- una base dello spazio vettoriale è denotata con una lettera calligrafica, tipo $\mathcal{B}$, in [A] e con una lettera in grassetto, tipo $\mathbf{e}$, in [S].
- la matrice associata ad un'applicazione lineare $T : V \to W$ rispetto ad una base $\mathbf{e}$ in V ed una base $\mathbf{f}$ in W è denotata in [S] tramite $M_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(T)$ (notare l'ordine scambiato). Questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T(\underline{e}_j)$ nella base $\mathbf{f}$.
- sia $\mathbf{g}$ una seconda base di V: la matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathbf{g}$ alla base $\mathbf{e}$ (e cioè la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{e}_j$ nella base $\mathbf{g}$), è denotata in [S] con il simbolo $M_{\mathbf{g},\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_V)$.
- lo spazio duale è denotato con V' in [A] e con $V^\vee$ in [S].
- il sottospazio vettoriale generato da k vettori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è denotato in [A] con $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ e in [S] con $< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k >$.
- il gruppo degli isomorfismi di V in se stesso è denotato $GL(V)$ in [S].
- il nucleo di un'applicazione lineare $T : V \to W$ è denotato in [A] con $\mathrm{Ker}T$ ed in [S] con $N(T)$.
- la trasposta di una matrice M è denotata in [A] con M^T ed in [S] con ${}^tM$.
- in [S] vengono usate $(x_1, \dots, x_n)$ (quindi lettere *minuscole*) per i punti generici di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}$ un campo; le X (maiuscole) vengono invece utilizzate come indeterminate in sistemi lineari o espressioni polinomiali.

Complementi 5. (Sullo spazio affine numerico.) Sia $\mathcal{A}_3$ lo spazio affine. Fissiamo un riferimento affine $RA(O\underline{i}\underline{j}\underline{k})$ con coordinate associate (x_1, x_2, x_3). Sappiamo che si stabilisce in questo modo una biezione $\mathcal{A}_3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

- le rette e i piani di $\mathcal{A}_3$ vengono trasformati nelle sottospazi affini [5] di dimensione 1 e 2 di $\mathbb{R}^3$
- il gruppo $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3)$ delle affinità di $\mathcal{A}_3$ corrisponde tramite questa biezione al gruppo

$$\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R}) := \{T_{B,\underline{c}}\,, B \in GL(3,\mathbb{R})\,, \underline{c} \in \mathbb{R}^3\}$$

[4] Sernesi := [S]
[5] [A] pag. 164

dove $T_{B,\underline{c}}(\underline{x}) = B\underline{x} + \underline{c}$ (è facile verificare che $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ è effettivamente un sottogruppo del gruppo di tutte le trasformazioni (e cioè biezioni) di $\mathbb{R}^3$).

È ora chiaro che possiamo definire lo spazio affine n-dimensionale come $\mathbb{R}^n$ insieme al gruppo $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R}) := \{T_{B,\underline{c}}\,, B \in GL(n,\mathbb{R})\,, \underline{c} \in \mathbb{R}^n\}$; possiamo anche definire la geometria affine esattamente come nell'osservazione 1. Ad esempio, essere un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k ([A] pag. 164)è una proprietà affine perché è una proprietà comune a tutti i trasformati di tali sottospazio tramite gli elementi di $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$.
Notazione: $\mathbb{R}^n$ insieme al gruppo $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ è detto spazio affine numerico reale di dimensione n ed è denotato $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.

Complementi 6. Si può dare una definizione assiomatica di spazio affine $\mathbf{A}$ associato ad uno spazio vettoriale V. Per i dettagli vi rimando a [S] pag 91. La defizione di spazio affine $\mathcal{A}_3$ è ottenuta come caso particolare della definizione assiomatica considerando $V = \mathcal{V}_O$ e l'applicazione $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathcal{V}_O$ che associa a (P, Q) il vettore $\overline{OQ} - \overline{OP}$. Analogamente, lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ è ottenuto prendendo in [S] pag. 91 l'insieme $\mathbf{A} := \mathbb{R}^n$ e lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^n$ con applicazione $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che associa a $(\underline{x}, \underline{y})$ il vettore $\underline{y} - \underline{x}$. Le affinità nel caso generale sono definite in [S] pag. 178; a pag. 183 trovate la descrizione delle affinità di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ seguendo Sernesi e queste coincidono precisamente con le nostre. Analogamente, la descrizione delle affinità di $\mathcal{A}_3$ è caso particolare del Teorema 14.8 pag. 184. Il Corollario 14.9 è il caso generale della corrispondenza fra $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3)$ e $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ alla quale facevamo allusione in **Complementi 5**. La geometria affine è definita in [S] a pag 185.

Complementi 7. Sia A una matrice reale $n \times n$ e supponiamo che $A = A^T$. Sia ϕ_A la forma quadratica definita da A in $\mathbb{R}^n$.
Le seguenti sono equivalenti:
(1) ϕ_A è definita positiva
(2) tutti gli autovalori di A sono positivi
(3) tutte le sottomatrici principali di A hanno determinante positivo
(4) $\exists W \in GL(n,\mathbb{R})$ tale che $A = W^T W$.
Parte dell'enunciato è l'esercizio 16.4 in [A] (p. 419): il testo dell'esercizio contiene la def. di sottomatrice principale.
Dimostrazione. L'equivalenza di (1) e (2) è il teorema 16.3 in [A].
Dimostriamo l'equivalenza di (1) e (3). Supponiamo (1) (e quindi (2)) vera. È chiaro che $\det(A) > 0$, dato che il determinante è il prodotto degli autovalori. Facciamo vedere che anche $\mathcal{A}_k$ ha determinante positivo $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Sia $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \equiv (\underline{x}', \underline{0})$ con $\underline{x}' \in \mathbb{R}^k$, $\underline{x}' \neq \underline{0}$. Per ipotesi $\underline{x}^T A \underline{x} > 0$; d'altra parte $\mathcal{A}_k$ è simmetrica ed un facile conto mostra che per $\underline{x} = (\underline{x}', \underline{0})$ si ha $\underline{x}^T A \underline{x} = (\underline{x}')^T \mathcal{A}_k \underline{x}'$. Quindi $(\underline{x}')^T \mathcal{A}_k \underline{x}' > 0 \ \forall \underline{x}' \neq \underline{0}$ in $\mathbb{R}^k$; per l'equivalenza di (1) e (2) ne segue che $\det \mathcal{A}_k > 0$ che è quello che dovevamo dimostrare. L'implicazione (1) $\Rightarrow$ (3) è dimostrata.
Facciamo ora vedere che (3) $\Rightarrow$ (1). Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo l'implicazione vera per $n - 1$ e dimostriamo che allora è anche vera per n. Sia $W = \mathrm{Span}(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{n-1})$. La sottomatrice $\mathcal{A}_{n-1}$ induce una forma quadratica ϕ_W su W; inoltre le sottomatrici principali di $\mathcal{A}_{n-1}$ sono tutte a determinante positivo. Per ipotesi induttiva ne segue che ϕ_W è definita positiva; quindi la restrizione di ϕ ad un sottospazio di dimensione $n - 1$ è definita

positiva; per il teorema di Sylvester p. 398 ne segue che A ha almeno $n-1$ autovalori positivi; dato che per ipotesi $\det A \equiv \det \mathcal{A}_n > 0$ ne segue che *tutti* gli autovalori di A devono essere positivi. Vale allora (2) e quindi (1). L'implicazione (3) $\Rightarrow$ (1) è dimostrata.
Facciamo vedere che (2) $\Rightarrow$ (4): sempre per il teorema di Sylvester sappiamo che A è congruente alla matrice identità: quindi esiste $C \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $C^T AC = \mathrm{Id}$. Basta porre $W := C^{-1}$.
Supponiamo ora (4) vera e sia $\underline{x} \neq \underline{0}$: si ha allora

$$\underline{x}^T A\underline{x} = \underline{x}^T W^T W\underline{x} = (W\underline{x})^T W\underline{x} = ||W\underline{x}|| > 0$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $W \in GL(n, \mathbb{R})$.

Osservazione 8. Il principio di dualità negli spazi proiettivi può essere trattato elegantemente utilizzando la nozione di annullatore ([A] pp 171-172 ed esercizio 8C.2). Riprendiamo da [S] p. 315, prima del teorema 26.2. La discussione fatta sino a questo punto dimostra che δ^{-1} induce un'applicazione biunivoca

$$\Sigma : \{ \text{ sottospazi di } P(V)\} \longrightarrow \{ \text{ sottospazi di } P(V^\vee)\}$$

che associa a S il sottospazio $\delta^{-1}(\Lambda_1(S))$. Quest'applicazione scambia le inclusioni e manda sottospazi di dimensione k in sottospazi di dimensione $n-k-1$. Sin qui nulla di nuovo. L'osservazione fondamentale è che

$$\text{se } S = P(W) \text{ allora } \Sigma(S) = P(W^0)\,.$$

Dimostrazione. È bene richiamare la definizione di W^0: $W^0 := \{F \in V^\vee \mid F(\underline{w}) = 0 \,\forall \underline{w} \in W\}$. Facciamo vedere che $P(W^0) \subset \Sigma(S)$. Se $[F] \in P(W^0)$ allora è chiaro che $F(\underline{w}) = 0\ \forall \underline{w} \in W$ e quindi $W \subset \mathrm{Ker}F$; ne segue che $S(= P(W))$ è contenuto nell'iperpiano $P(\mathrm{Ker}F)$ definito da F il che vuol dire, per definizione, che $P(\mathrm{Ker}F) \subset \Lambda_1(S)$ o, equivalentemente, che $[F] \in \delta^{-1}(\Lambda_1(S)) \equiv \Sigma(S)$ che è quello che dovevamo dimostrare. Viceversa, se $[F] \in \Sigma(S) = \delta^{-1}(\Lambda_1(S))$, allora $[F] \in P(W^0)$: ciò segue subito dalla Prop. 26.1 di [S].
Conclusione: l'applicazione Σ è indotta dall'applicazione

$$(\ )^0 : \{ \text{ sottospazi di } V\} \longrightarrow \{ \text{ sottospazi di } V^\vee\}$$

che associa a $W \leq V$ il suo annullatore $W^0 \leq V^\vee$. Per l'esercizio 8C.2 sappiamo che se U e W sono sottospazi di V allora

- $U \subset W \Rightarrow W^0 \subset U^0$
- $(W \cap U)^0 = W^0 + U^0$
- $(W + U)^0 = W^0 \cap U^0$

il che implica che Σ scambia le inclusioni (già lo sapevamo) e scambia *spazio congiungente* con *spazio intersezione*. Un'analoga osservazione vale ovviamente per Σ^{-1}.
Una *proposizione grafica*

$$T(S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$$

è una proposizione che coinvolge i sottospazi proiettivi di dimensione $h_1, \ldots, h_k$, la nozione di spazio congiungente, di spazio intersezione, di contenere ed di essere contenuto. La proposizione grafica *duale*

$$T^*(S_{n-h_1-1}, \ldots, S_{n-h_k-1}; \cap, \cup, \supset, \subset)$$

è ottenuta scambiando *sottospazi di dimensione* h_j con *sottospazi di dimensione* $n - h_j - 1$, *spazi congiungenti* con *spazi intersezione* e *contenere* con *essere contenuto.*

Principio di dualità:
se $T(S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$ è una proposizione grafica vera, allora è anche vera la proposizione duale $T^*(S_{n-h_1-1}, \ldots, S_{n-h_k-1}; \cap, \cup, \supset, \subset)$.

Dimostrazione.
Dato che $P(V)$ e $P(V^\vee)$ sono isomorfi, ne segue che se $T(S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$ è vera allora è anche vera la proposizione $T(S^\vee_{h_1}, \ldots, S^\vee_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$. Applichiamo ora Σ^{-1} ai sottospazi che intervengono in T; utizzando le proprietà di Σ^{-1} otteniamo che è anche vera

$$T(\Sigma^{-1}(S^\vee_{h_1}), \ldots, \Sigma^{-1}(S^\vee_{h_k}); \cap, \cup, \supset, \subset)\,;$$

ma quest'ultima proposizione è proprio T^*.

Esempio. (Sernesi p. 317.) Sia T la proposizione: *due punti distinti sono congiunti da una retta.* T può essere scritta come segue:
$P \neq Q \Rightarrow L(P, Q) = S_1$
Ora P e Q sono due S_0 (distinti) e $n - 0 - 1 = n - 1$; quindi per individuare la proposizione duale dobbiamo sostituire *punti distinti* con *iperpiani distinti*; poi dobbiamo scambiare *spazio congiungente* di dimensione 1 con *spazio intersezione* di dimensione $n - 1 - 1 = n - 2$; ne segue che la duale di T è:
T^*: *due iperpiani distinti si intersecano in un sottospazio di codimensione 2.*

Osservazione 9. Abbiamo dimostrato in classe che ogni quadrica è affinemente equivalente ad una delle seguenti quadriche in forma canonica; inoltre le quadriche della lista sono affinemente distinte.

$\mathcal{Q}_1$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	ellissoide reale
$\mathcal{Q}_2$	$x^2 + y^2 + z^2 = -1$	ellissoide immaginario
$\mathcal{Q}_3$	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$	iperboloide ellittico
$\mathcal{Q}_4$	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	iperboloide iperbolico
$\mathcal{Q}_5$	$x^2 + y^2 = 2z$	paraboloide ellittico
$\mathcal{Q}_6$	$x^2 - y^2 = 2z$	paraboloide iperbolico
$\mathcal{Q}_7$	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	cono immaginario
$\mathcal{Q}_8$	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	cono reale
$\mathcal{Q}_9$	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	cilindro immaginario
$\mathcal{Q}_{10}$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	cilindro ellittico
$\mathcal{Q}_{11}$	$x^2 - y = 0$	cilindro parabolico
$\mathcal{Q}_{12}$	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	cilindro iperbolico
$\mathcal{Q}_{13}$	$x^2 + y^2 = 0$	coppia di piani complessi coniugati incidenti
$\mathcal{Q}_{14}$	$x^2 - y^2 = 0$	coppia di piani incidenti
$\mathcal{Q}_{15}$	$x^2 + 1 = 0$	coppia di piani complessi coniugati paralleli
$\mathcal{Q}_{16}$	$x^2 - 1 = 0$	coppia di piani reali distinti e paralleli
$\mathcal{Q}_{17}$	$x^2 = 0$	coppia di piani reali coincidenti

Per una rappresentazione grafica di molte di queste quadriche si veda [A] pag. 406.

Osservazione 10. La classificazione metrica e affine delle quadriche è reperibile in [Ab] pp. 105 - 108. Riportiamo qui la forma canonica delle quadriche euclidee:

$\mathcal{Q}_1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	ellissoide reale
$\mathcal{Q}_2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	ellissoide immaginario

$\mathcal{Q}_3$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ iperboloide ellittico

$\mathcal{Q}_4$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ iperboloide iperbolico

$\mathcal{Q}_5$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ paraboloide ellittico

$\mathcal{Q}_6$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ paraboloide iperbolico

$\mathcal{Q}_7$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 0$ cono immaginario

$\mathcal{Q}_8$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$ cono reale

$\mathcal{Q}_9$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ cilindro immaginario

$\mathcal{Q}_{10}$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cilindro ellittico

$\mathcal{Q}_{11}$ $x^2 = 2py$ cilindro parabolico

$\mathcal{Q}_{12}$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cilindro iperbolico

$\mathcal{Q}_{13}$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ coppia di piani complessi coniugati incidenti

$\mathcal{Q}_{14}$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ coppia di piani incidenti

$\mathcal{Q}_{15}$ $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$ coppia di piani complessi coniugati paralleli

$\mathcal{Q}_{16}$ $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$ coppia di piani reali distinti e paralleli

$\mathcal{Q}_{17}$ $x^2 = 0$ coppia di piani reali coincidenti

Sappiamo che $\mathcal{Q}_i$ e $\mathcal{Q}_j$ non possono essere metricamente equivalenti se $i \neq j$ (infatti non sono neanche affinemente equivalenti). All'interno di ogni $\mathcal{Q}_j$ dovremo avere cura di prendere i coefficienti a, b, c in modo tale che che $a \geq b \geq c$ etc etc ; con questa accortezza avremo che coefficienti diversi daranno quadriche metricamente distinte: ad esempio

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

sono metricamente distinte (spiegate voi perché), mentre

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$

(e si noti che la seconda quadrica non soddisfa $a \geq b \geq c$) sono metricamente equivalenti perché ottenute una dall'altra tramite lo scambio di assi $x \leftrightarrow y$ che è ovviamente un'isometria. Ad ogni modo un tale ragionamento era già stato fatto per le coniche.

Osservazione 11. (Sulle curve simmetriche rispetto a un punto) Nel piano affine fissiamo un punto C. Possiamo defire l'applicazione σ_C che associa ad un punto P il suo simmetrico rispetto a C e cioè il punto P' tale che C sia il punto medio del segmento PP'. In termini di vettori ciò è equivalente a richiedenre che $\overline{CP} = -\overline{CP'}$ in $\mathcal{V}_C$. Fissiamo un riferimento affine e siano (c_1, c_2) le coordinate di C in tale riferimento. Allora è facile verificare che σ_0 è l'affinità $(x, y) \to (2c_1 - x_1, 2c_2 - y)$. Una curva algebrica $\mathcal{C}$ definita da $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ è detta simmetrica rispetto a P_0 se $\mathcal{C} = \sigma_{P_0}(\mathcal{C})$. Consultate a questo punto [S] pag 344 e anche pag 364, 31.2 Oss. 1.