Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Compito pomeridiano del 20/12/05

Esercizio 1. Retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1. Siano dati i punti p_1, p_2, p_3, p_4 con

$$p_1 = [1,0] \quad p_2 = [3,4] \quad p_3 = [2,1] \quad p_4 = [4,5].$$

1.1. Calcolare i birapporti $\beta(p_1, p_2, p_3, p_4)$ e $\beta(p_2, p_1, p_4, p_3)$.
1.2. Determinare l'epressione in coordinate della proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(p_1) = p_2 \quad f(p_2) = p_1 \quad f(p_3) = p_4 \quad f(p_4) = p_3$$

1.3. Dire se esiste una proiettività $g : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$g(p_1) = p_2 \quad g(p_2) = p_3 \quad g(p_3) = p_4 \quad g(p_4) = p_1.$$

Esercizio 2. Retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1. Determinare la proiettività $\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che $\phi([1,3]) = ([-2,0])$, $\phi([1,1]) = [3,4]$, $\phi([1,0]) = [2,3]$.

Esercizio 3. Piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Siano r, r', s, s' le rette definite da

$$r : x_0 - x_1 = 0 \qquad r' : x_0 + x_1 = 0$$

$$s : x_0 + x_1 + x_2 = 0 \qquad s' : x_1 + x_2 = 0.$$

Determinare una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r', \quad f(s) = s' \qquad f([1,2,1]) = ([1,1,1]).$$

Una proiettività siffatta è unica?

Esercizio 4. Piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Siano dati i punti $P_1 = [1,4,1]$, $P_2 = [0,1,1]$, $P_3 = [2,3,-3]$.
4.1. Dimostrare che i tre punti sono allineati e determinare le retta r che li contiene.
4.2. Determinare su r il sistema di riferimento di coordinate omogenee λ, μ in modo tale che i punti P_1, P_2, siano i punti fondamentali e P_3 il punto unitá, cioè determinare λ, μ in funzione di x_0, x_1, x_2.
4.3. Determinare le coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 del punto $P \in r$ tale the il birapporto $\beta(P_1, P_2, P_3, P) = -4$.

Esercizio 5. Spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate proiettive x_0, x_1, x_2, x_3. Sia $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ la proiettività definita da

$$f([x_0, x_1, x_2, x_3]) = [-x_0 - 6x_3, -2x_0 + x_1 + x_2 - 6x_3, -2x_0 + x_2 - 6x_3, 2x_3].$$

5.1. Verificare che f ha tre punti fissi e determinarne le coordinate[1].
5.2. Dimostrare che f fissa l'iperpiano di equazione $x_3 = 0$.

Per casa

Esercizio 6. Spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ su un campo $\mathbb{K}$. Sia $\phi : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ una proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
6.1. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dimostrare che ϕ ha almeno un punto fisso.

[1] Cosa significa che un punto $P = [v]$ è un punto fisso?

6.2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 1$. Dimostrare che se ϕ non è l'identità e ϕ^3 è l'identità, allora ϕ non ha punti fissi.

Esercizio 7. Dimostrare che lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ su un campo $\mathbb{K}$ si può scrivere come

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \cup \mathbb{A}^{n-1}(\mathbb{K}) \cup \cdots \cup \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \cup \{*\}$$

dove $\{*\}$ è l'insieme costituito da un solo punto.
Suggerimento. Usare l'applicazione j_0 di passaggio a coordinate omogenee e l'induzione.