Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Compito pomeridiano del 13/12/05

Esercizio 1. Piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ con coordinate x, y e piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Sia H_0 la retta $x_0 = 0$ e

$$j_0^{-1} : \mathbb{P}^2 \backslash H_0 \to \mathbb{A}^2$$

l'applicazione di passaggio a coordinate non omogenee rispetto a x_0.

1.1. Determinare equazioni parametriche e cartesiana in coordinate omogenee della retta r passante per i punti $[1, 1, 0]$ e $[3, 0, 1]$. Determinare equazioni cartesiane in coordinate non omogenee rispetto a x_0 di $j_0^{-1}(r)$.

1.2. Stabilire se esistono coordinate proiettive omogenee y_0, y_1, y_2 tali che i punti $[1, 1, 2]$, $[0, 1, 1]$, $[1, -1, 0]$, $[0, 0, 1]$ possono essere assunti come i punti fondamentali di un nuovo sistema di riferimento.

1.3. Determinare il punto improprio rispetto a x_0 delle rette di $\mathbb{A}^2$

$$x + 1 = 0 \qquad x + 3y = 0 \qquad x - y + 2 = 0$$

1.4. Determinare coordinate omogenee del punto comune alle chiusure proiettive delle rette $3x + 3y + 4 = 0$ e $x + y = 0$.

Esercizio 2. Spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3.

2.1. Verificare se le rette

$$r : x_0 - x_1 + x_2 = 0, \qquad x_1 + 3x_3 = 0$$

$$r' : x_0 + x_2 + 3x_3 = 0 \qquad x_0 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

sono sghembe oppure incidenti.

2.2. Dimostrare che, date comunque due rette r e r' sghembe e un punto $P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tale che $P \notin r \cup r'$, esiste un'unica retta s contenente P ed incidente sia r che r'.

2.3. Determinare equazioni cartesiane della retta s contenente $P = [0, 1, 0, 1]$ ed incidente le rette

$$r : x_0 - x_2 + 2x_3 = 0, \qquad 2x_0 + x_1 = 0$$

$$r' : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \qquad x_0 + x_3 = 0.$$

Esercizio 3. Spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3. Sia $P = [1, 1, 0, 1]$ e H il piano di equazione

$$x_0 + 2x_1 + x_2 = 0.$$

Determinare, se possibile, la proiezione[1] $\pi_{P,H}$ da P in H dei punti P, $P_1 = [1, 0, 2, 0]$, $P_2 = [1, -1, 1, 0]$.

Esercizio 4. Spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Siano $Q_0 = [0, 0, 1, 0, 0]$, $Q_1 = [0, 1, 2, 0, 0]$, $Q_3 = [1, 0, 0, 1, 0]$ e sia S il sottospazio proiettivo generato dai tre punti. Sia $P = [0, 0, 0, 0, 1]$.

4.1. Calcolare equazioni cartesiane del cono proiettante[2] $C_P(S)$.

---

[1] La proiezione $\pi_{P,H}$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ su un iperpiano H di centro un punto P è l'applicazione $\pi_{P,H} : \mathbb{P}^n \backslash \{P\} \to H$ definita come segue. Dato un punto Q di $\mathbb{P}^n$ con $Q \neq P$, sia $L(P, Q)$ la retta di $\mathbb{P}^n$ che congiunge per P e Q. Allora si definisce $\pi_{P,H}(Q) = L(P, Q) \cap H$.

[2] Ricordate che $C_P(S)$, il cono proiettante un sottoinsieme S di un spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ da un punto P, è definito come l'unione di tutte le rette che contengono P ed almeno un punto di S. In simboli $C_P(S) = \bigcup_{Q \in S} L(P, Q)$.

4.2. Calcolare equazioni cartesiane della proiezione[3] di S da P sull'iperpiano di equazione $x_0 = 0$.
Suggerimento. Quando S è un sottospazio proiettivo, è facile trovare il cono proiettante $C_P(S)$. Considerate prima il caso in cui S è una retta.

[3] La proiezione di S da un punto P su un iperpiano H è data da $C_P(S) \cap H$.