Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Compito pomeridiano del 6/12/05

Esercizio 1. Piano euclideo $\mathcal{E}^2$ con coordinate x, y rispetto ad un fissato sistema di riferimento cartesiano e spazio eucideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate x, y, z rispetto ad un fissato sistema di riferimento cartesiano.

Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x = 0.$$

1.1. Dimostrare che $\mathcal{C}$ è un'ellisse reale.
1.2. Determinare la lunghezza del semiasse maggiore e l'equazione cartesiana della retta r che lo contiene nelle coordinate x, y.
1.3. Scrivere equazioni cartesiane del cilindro che proietta $\mathcal{C}$ parallelamente all'asse z.

Esercizio 2. Piano euclideo $\mathcal{E}^2$ con coordinate x, y. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$2xy - 2x + 3 = 0.$$

2.1. Verificare che $\mathcal{C}$ è un'iperbole .
2.2. Trovare centro di simmetria, asintoti e fuochi di $\mathcal{C}$ nelle coordinate x, y.

Esercizio 3. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate x, y, z. Si consideri la quadrica Σ di equazione

$$-2xy + z^2 = 1.$$

3.1. Determinare il tipo di quadrica e verificare che è rigata.
3.2. Determinare le equazioni cartesiane delle due schiere di rette di Σ.
Suggerimento. Per **3.2.** non serve usare la forma canonica di Σ: basta guardare l'equazione che la definisce.
3.3. Trovare le rette delle schiere passanti per il punto $(0, 0, 1)$.
3.4. Dimostrare che esiste una retta r tale che i piani ortogonali ad r intersecano Σ in circonferenze. Trovare equazioni cartesiane nelle coordinate x, y, z di r e dei piani che tagliano Σ in una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.

Esecizio 4. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate x, y, z. Si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 5 = 0.$$

4.1. Verificare che $\mathcal{Q}$ è una sfera determinandone il centro e il raggio.
Suggerimento Non serve usare la forma canonica di $\mathcal{Q}$: quale è l'equazione della sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio R?
4.2. Verificare che il piano π di equazione

$$x + y - z = 3$$

è secante $\mathcal{Q}$.
4.3. Determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta intersecando $\mathcal{Q}$ con π, ossia $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \pi$.